Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1969-70.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 5. januar kl. 14-18.

Opgave nr. 1.

A) En plan med ligningen $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{x}}| = 1$ indeholder en linie F med parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$, hvor $\underline{a},\underline{v}$ givne, $t \in \mathbb{R}$. Linien F er frembringer på en hyperboloide med et net med ligning $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}| = 1$. Vis, at der på F findes et punkt således at planen er tangentplan til hyperboloiden i punktet.

B) Indenfor $\mathbb{Q}[X]$ betragtes polynomierne

$$p(X) = X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2} + \dots \text{ med rødder } \alpha,\beta,\dots$$

og

$$q(X) = X^n + AX^{n-1} + BX^{n-2} + \dots \text{ med rødder } \alpha^2,\beta^2,\dots .$$

Find A udtrykt ved a,b,... . Vis, ved at betragte $\mathbb{Q}(\alpha)$ og $\mathbb{Q}(\alpha^2)$, at hvis n er ulige og p(X) irreducibel, så er q(X) også irreducibel. Angiv for n = 2 et polynomium p(X) som er irreducibelt, medens det tilsvarende q(X) er reducibelt.

Opgave nr. 2.

Lad I, J og K være idealer i en kommutativ ring $(M,+,\cdot)$. Man definerer I + J som mængden af udtryk i+j, hvor $i \in I$ og $j \in J$. Vis, at I + J er et ideal S i M.

Hvilket inklusionstegn gælder mellem mængderne

(A) $\quad I + (J \cap K) \quad$ og $\quad (I + J) \cap (I + K)$?

(opgaven fortsætter)

Godtgør, at for $M = \mathbb{Z}[X,Y]$ og $I = (X-Y)$, $J = (X)$ og $K = (Y)$ gælder $I + J = I + K$, og angiv et polynomium som tilhører den ene men ikke den anden af mængderne (Λ).

Lad φ, ψ og χ betegne homomorfe afbildninger af $(M,+,\cdot)$ med kerner hhv. I, J og K. Vis, at det for ethvert par $a,b \in S$ er muligt at finde et $s \in S$, så $(\varphi(a),\psi(b)) = (\varphi(s),\psi(s))$.

Antag at $I + J = I + K = S$. Vis, at når og kun når mængderne (Λ) er identiske, vil der til ethvert $a \in S$ findes et $s \in S$ hvor $(\varphi(a),0,0) = (\varphi(s),\psi(s),\chi(s))$.

Hvorledes kan man udfra det ovenstående begrunde, at der i $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ findes tal s, som ved division med 2,3 og 5 giver rester hhv. 1,0 og 0 ? Eller resterne 0,0 og 2 eller resterne 1,0 og 2 ?

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

En funktion $f:\dot{R}^k \to \dot{R}$ kaldes lokalt integrabel, hvis $f \cdot 1_A$ er integrabel for enhver kompakt delmængde A af $\dot{R}^k$.

a) Vis at enhver lokalt integrabel funktion er målelig.
Vink: Udnyt at $\dot{R}^k$ er foreningsmængden af en følge af kompakte mængder.

Lad f være en ikke-negativ, lokalt integrabel funktion på $\dot{R}^k$. Lad $\mathcal{L}_f$ betegne mængden af målelige funktioner g på $\dot{R}^k$, således at gf er integrabel. Sæt $J(g) = I(gf)$, og definer
$\mathcal{N}_f = \{g \in \mathcal{L}_f \mid J(|g|) = 0\}$.

b) $\mathcal{L}_f$ er et vektorrum (bevis herfor kræves ikke). Vis at $\mathcal{L}_f$ indeholder enhver kontinuert funktion på $\dot{R}^k$ med kompakt støtte.

c) Vis at $\mathcal{N}_f$ er et underrum af $\mathcal{L}_f$, og at $\|g\| = J(|g|)$ definerer en norm på vektorrummet bestående af ækvivalensklasser af funktioner i $\mathcal{L}_f$ modulo funktioner i $\mathcal{N}_f$.

d) Vis (ved hjælp af det tilsvarende resultat for $\mathcal{L}_1(\dot{R}^k)$) at det normerede vektorrum er et Banach rum.