Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1969.

M A T E M A T I K 2.

(M A T E M A T I K C)

Skriftlig prøve 2.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 18. juni kl. 14-18.

Opgave nr. 1.

Vis at der blandt alle positive, målelige funktioner $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ netop findes én som tilfredsstiller

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt + 1$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vink: Vis først at f er kontinuert.

Opgave nr. 2.

Afgør om funktionen $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$f(x+iy) = \cos(e^{x+y}) + i\,\sin(e^{x+y})$$

er holomorf i $\mathbb{C}$.

Opgave nr. 3.

For enhver mængde $M \subset \mathbb{R}$, som er en disjunkt forening af kompakte intervaller, skal $\frac{4}{5}M$ betegne den mængde der fremkommer, når man fra hvert interval i M fjerner den midterste (åbne) femtedel.

En følge af mængder defineres ved: $A_1 = [0,1]$; $A_{n+1} = \frac{4}{5} A_n$.

Gør rede for hvorvidt mængden $\cap A_n$ er Riemann målelig.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 4.

Find

$$\int_{\partial F} \frac{4z^3+3z^2-2}{z^4+z^3-2z}\,dz$$

hvor $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 2\}$.

Opgave nr. 5.

Givet en funktion $f:[0,1] \to [0,1]$.

Vis at $\overline{I}(f) + \underline{I}(1_{[0,1]}-f) = 1$.

Opgave nr. 6.

Givet en kontinuert funktion $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, hvor $f(0) = 0$.

Vis at f kan tilnærmes ligeligt på $[-1,1]$ med polynomier uden konstante led.

Vink: Vurdér konstantleddet i et approksimerende polynomium.

Opgave nr. 7.

En følge $\{f_n\}$ af funktioner på $[0,1[$ er defineret ved

$$f_n(x) = (-1)^m \quad \text{for} \quad m2^{-n} \leqq x<(m+1)2^{-n}, \quad m = 0,1,\ldots,2^n-1.$$

Find $\liminf f_n$.

Opgave nr. 8.

Formulér hovedsætningen om eksistens og entydighed af løsninger til en sædvanlig differentialligning af første orden.

Opgave nr. 9.

En periodisk funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med periode 2π er givet ved

$$f(x) = n^{-1} \quad \text{for} \quad (n+1)^{-1}2\pi < x \leqq n^{-1}2\pi \;;\; n = 1,2,3\ldots$$

Find de punkter i intervallet $]0,2\pi]$ hvor Fourier-rækken for f er konvergent og angiv rækkens sum.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 10.

Funktionen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er defineret ved

$$(x,y) = f(u,v) = (e^u \cos v,\ e^u \sin v).$$

Vis at f har en omvendt afbildning i en omegn af punktparret $(u,v) = (0,0)$; $(x,y) = (1,0)$. Gør rede for at f^{-1} er en C^1-funktion og find de partielle afledede af f^{-1} i punktet $(x,y) = (1,0)$.

Opgave nr. 11.

Sæt $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ og $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}$. Lad $f:T \to T$ være den identiske afbildning.

Vis (for eksempel ved hjælp af omløbstallet) at f ikke kan udvides til en kontinuert funktion $g:D \to T$.

Opgave nr. 12.

Betegnelser som i opgave nr. 11.

Vis at f på én og kun én måde kan udvides til en kontinuert funktion $h:D \to \mathbb{C}$ som er holomorf i det indre af D.