Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1969.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 11. juni kl. 14-18.

Opgave nr. 1.

A) Lad α,β og γ betegne rødderne $\in \mathbb{C}$ til polynomiet $X^3 + aX^2 + bX + c$. Bestem det moniske polynomium hvis rødder er $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ og $\beta+\gamma$; polynomiets koefficienter ønskes udtrykt ved a,b og c.

B) Givet et 3-dimensionalt euklidisk rum med koordinatsystem. Kvadrikkerne K_A og K_B med ligninger hhv. $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_| = 1$ og $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}_| = 1$ ($\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er symmetriske matricer) skærer begge planen P med ligningen $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{x}}_| = 1$ i den samme ellipse E. Er $K_A \cap K_B = E$? Vis, at matricerne $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{L}}_|\underline{\underline{L}}$ er lineært afhængige.

Opgave nr. 2.

Lad M være mængden af de rationale tal, der kan skrives som en brøk $\frac{m}{n}$, hvor $m,n \in \mathbb{Z}$ og n er ulige. Vis, at M er en delring af $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. Er der entydig faktorisering i M ? Skriv $\frac{40}{21}$ som produkt af faktorer, hvoraf en regulær og de øvrige irreducible. Vis, at der findes netop ét maximalideal I i M og angiv det, og giv strukturen af $(M,+,\cdot)/I$.

Dernæst betragtes polynomiumsringene $M[X]$ og $\mathbb{Z}[X]$. Godtgør, at i dem begge vil elementet $2X-1$ frembringe et primideal. Undersøg om $2X-1$ frembringer et maximalideal i $M[X]$, hhv. i $\mathbb{Z}[X]$ (man kan f.eks. betragte homomorfe afbildninger af polynomiumsringene ind i $\mathbb{Q}$, hvorved $X \to \frac{1}{2}$ og polynomiernes koefficienter er fixe).

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

En målelig funktion på $\dot{R}^k$ siges som bekendt at være integrabel i udvidet forstand, såfremt det øvre og nedre Lebesgue integral af funktionen har samme værdi i $\dot{R}^*$.

(1) Gør rede for at enhver målelig funktion $h:\dot{R}^k \to [0, \infty]$ er integrabel i udvidet forstand.

(2) Vis at hvis $f:\dot{R}^2 \to [0, \infty]$ er målelig, så er også $g:\dot{R} \to [0, \infty]$ målelig, hvor

$$g(x) = \int f(x,y)dy \text{ .}$$

(3) Vis Tonellis sætning for positive, målelige funktioner f på $\dot{R}^2$:

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x,y)\, dydx$$

hvor de itererede integraler skal tages i udvidet forstand.