Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1968-69.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 7. januar kl. 10-14.

Opgave nr. 1.

I et 3-dimensionalt euklidisk rum betragtes kvadrikken Q_t givet ved ligningen $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}^{|} = 1$, hvor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} t & 1 & t-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

For hvilke t er $\underline{\underline{B}}$ ikke regulær? Angiv for disse t arten af Q_t, og angiv for et af dem retningen for en frembringer på kvadrikken.

Bestem for $t = 0$ tallet c, således at planen $x_2 + x_3 = c$ er tangentplan til kvadrikken.

Bestem de t, for hvilke Q_t er en ellipsoide; gør rede for at der findes et punkt $\underline{p} \in Q_t$ med $|\underline{p}| = 1$ og hvor $\underline{p}$ er ortogonal til tangentplanen i $\underline{p}$ (altså: $\underline{p}$ angiver i det euklidiske rum en "halvakse" af længden 1 i ellipsoiden), og bestem $\underline{p}$.

Vis, at for ethvert t er rødderne i det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{B}}$ alle forskellige. Hvorledes kan dette kort udtrykkes som en (benægtende) geometrisk egenskab ved Q_t?

(Opgaverne fortsætter)

Opgave nr. 2.

Ved graden af et egentligt polynomium i to variable over et legeme M,

$$P(X_1,X_2) = \sum_{j,k} a_{jk} X_1^j X_2^k \qquad (\text{alle } a_{jk} \neq 0),$$

forstås som bekendt den maximale værdi af j+k. Godtgør, at graden af et produkt af to egentlige polynomier $\in M[X_1,X_2]$ er summen af faktorernes grader.

Polynomiet $X_1^3 + X_2^3 - e$ over et legeme med karakteristik 3 (e er etelementet) ønskes skrevet som et produkt af to polynomier af positiv grad.

Vis, at for $M = \mathbb{C}$ kan polynomiet $X_1^n + X_2^n - 1$ ikke skrives som produkt $G(X_1,X_2)\cdot H(X_1,X_2)$ af to polynomier af positiv grad (man kan f.eks. betragte $G(X_1,X_2)$ for de $X_1 \in \mathbb{C}$, for hvilke $X_1^n = 1$).

Opgave nr. 3.

Vis, at der for $x \in [0,\pi]$ gælder

$$\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\sin 5x}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{\sin 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8}\sin^2 x,$$

og at der for $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ gælder

$$\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x.$$