Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1968.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 10. juni kl. 10 - 14.

Opgave nr. 1.

I et 3-dimensionalt euklidisk rum med en ortonormal basis har ellipsoiden E ligningen $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}_{|} = 1$, hvor $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ er en symmetrisk matrix.

De positive koordinatakser skærer E i 3 punkter. Vis, at tangentplanerne i disse har et skæringspunkt $\underline{q}$ som opfylder ligningen $\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{B}}^2\,\underline{\underline{q}}_{|} = \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}$ (hvor $\mathrm{tr}\underline{\underline{B}} = b_{11}+b_{22}+b_{33}$).

Godtgør, at fladen E_1 med ligning $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{x}}_{|} = \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}$ er en ellipsoide, og vis, at der findes en ortonormal basis, i hvilken matricerne for E og E_1 begge er diagonalmatricer. Angiv halvakserne for E_1 udtrykt ved halvakserne a, b og c for E (halvakserne målt på koordinatakserne i denne basis).

Vis, at for tre vilkårlige parvis ortogonale halvlinier gennem begyndelsespunktet vil tangentplanerne i deres skæringspunkter med E skære hinanden i et punkt af E_1.

Opgave nr. 2.

Lad I_1 og I_2 betegne idealer i en kommutativ ring. Man definerer $I_1 \cdot I_2$ som mængden af endelige summer $\Sigma\, a_1 a_2$, hvor $a_1 \in I_1$, $a_2 \in I_2$; vis, at $I_1 \cdot I_2$ er et ideal.

Man definerer $I_1 + I_2$ som mængden af udtryk $a_1 + a_2$, hvor $a_1 \in I_1$, $a_2 \in I_2$; vis, at $I_1 + I_2$ er et ideal. Vis, at i

(Opgaven fortsætter)

Københavns universitet

Matematik 2, prøve 1, sommeren 1968.

$(\ddot{Z},+,\cdot)$ vil $I_1 = (n_1)$ og $I_2 = (n_2)$ medføre $I_1+I_2 = (n_1,n_2)$.

Godtgør, at i $(\ddot{Z},+,\cdot)$ gælder

$$(I_1+I_2)\cdot(I_1\cap I_2) = I_1\cdot I_2 . \tag{A}$$

Vis, at der i $\dot{Q}[X_1,X_2]$ findes idealer I_1,I_2 for hvilke (A) ikke gælder.

Opgave nr. 3.

(1) Find
$$\int_K \frac{e^{i\beta z}}{z^2}\,dz ,$$

hvor K er cirklen $\{z \mid |z| = R\}$ med positiv omløbsretning.

(2) Vis, at når L er halvcirklen $\{z = x+iy \mid |z| = R,\ y \leq 0\}$ gennemløbet fra $-R$ til R, gælder

$$\int_L \frac{e^{i\beta z}}{z^2}\,dz \to -2\pi\beta \quad \text{for } R \to \infty, \quad \text{hvis } \beta \geq 0,$$

$$\int_L \frac{e^{i\beta z}}{z^2}\,dz \to 0 \quad \text{for } R \to \infty, \quad \text{hvis } \beta \leq 0.$$

(3) Vis herved, eller på anden måde, at

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cos \alpha x\,dx = \begin{cases} 0 , & \text{hvis } \alpha \geq 2 \\ \frac{1}{4}\pi(2-\alpha) , & \text{hvis } 0 \leq \alpha \leq 2 . \end{cases}$$