Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1967/68.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 16. januar kl. 10-14.

Opgave nr. 1.

I det følgende er B en regulær symmetrisk bilinearform på det n-dimensionale vektorrum over de reelle tal og $\mathrm{ind}_+ B = 1$.

Giv for n = 2 og n = 3 en geometrisk beskrivelse af mængden M_+ af punkter $\underline{x}$ i hvilke $B(\underline{x},\underline{x}) > 0$.

Vis for n = 2, at når $B(\underline{x},\underline{x}) > 0$ og $B(\underline{y},\underline{y}) > 0$, så er $B(\underline{x},\underline{y}) > 0$ hvis og kun hvis vektorerne $\underline{x}$ og $\underline{y}$ udspænder et konvekst vinkelrum (mindre end 180° og med toppunkt i $\underline{0}$) som helt tilhører M_+.

Vis for et vilkårligt n, at hvis $B(\underline{x},\underline{x})$, $B(\underline{y},\underline{y})$, $B(\underline{z},\underline{z})$, $B(\underline{x},\underline{y})$ og $B(\underline{x},\underline{z})$ alle er positive, så er $B(\underline{y},\underline{z})$ også positiv.

Opgave nr. 2.

Man betragter delringen $\mathbb{Z}[i]$ af $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Gør rede for at dens brøklegeme er $\mathbb{Q}[i]$.

Vis, at funktionen $\varphi : x + iy \to x^2 + y^2$ $(x,y \in \mathbb{R})$ afbilder $(\mathbb{Q}[i],\cdot)$ homomorft ind i $(\mathbb{Q},\cdot)$, og gør rede for at billedet af $(\mathbb{Z}[i] \setminus \{0\},\cdot)$ ved φ er en halvgruppe, som er en ægte del af $(\mathbb{N},\cdot)$.

Bevis, at $\mathbb{Z}[i]$ er en hovedidealring (vis og benyt, at man til to elementer, hhv. $d \neq 0$ og D, kan bestemme et element q, så $\varphi(D-qd) < \varphi(d)$).

(Opgaven fortsætter).

Københavns universitet

Matematik 2. Prøve 1.

Vinteren 1967/68.

Angiv de regulære elementer i $\mathbb{Z}[i]$. Vis, at $2+i$ er irreducibel, og beskriv kvotientringen $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)/I$, hvor I er hovedidealet $(2+i)$; specielt ønskes anført om den er endelig eller uendelig.

Opgave nr. 3.

Find integralet

$$I = \int_A \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy \;,$$

hvor A er trekanten $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x+y < 2\}$.

Vink. Anvend transformationen $(\xi,\eta) = (x-y,\ x+y)$.