Københavns universitet

<u>Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1967.</u>

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 12.maj kl. 10 - 14.

Opgave nr. 1.

En parabolsk kvadrik er i et 3-dimensionalt euklidisk rum fremstillet ved ligningen

(Q) $$\underline{\underline{x}}_{-}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}_{|} - 2\,\underline{\underline{L}}_{-}\,\underline{\underline{x}}_{|} - 2 = 0,$$

hvor matricen $\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk.

Hvad er værdien af det $\underline{\underline{B}}$? Angiv en normalvektor (ikke nødvendigvis normeret) i et vilkårligt punkt $\underline{\underline{p}}_{|}$ af fladen. Vis, at normalretningen vil tilhøre $N_B \backslash L^{-1}(0)$ netop når $\underline{\underline{p}}_{|}$ opfylder ligningen $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{p}}_{|} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{L}}_{|}$.

Idet

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & t & t+1 \\ t & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{L}}_{|} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

skal det vises, at for netop ét t, der ønskes angivet, vil en kvadrik med ligningen (Q) være parabolsk. Bestem punktet $\underline{p}$ på kvadrikken, således at normalretningen i $\underline{p}$ tilhører $N_B \backslash L^{-1}(0)$. Find endvidere koordinaterne for tre ortogonale enhedsvektorer $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$, således at fladen i et koordinatsystem med begyndelsespunkt $\underline{p}$ og basisvektorer $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ får en ligning af formen $y_3 = ay_1^2 + by_2^2$. Angiv arten af paraboloiden.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet

Matematik 2. Prøve 1.

Sommeren 1967.

Opgave nr. 2.

Vis, at polynomiet $a(X) = X^3 - 3X + 1$ er irreducibelt over $\dot{Q}$.

En rod (tilhørende $\dot{C}$) i $a(X)$ betegnes c. Angiv graden $[\dot{Q}(c):\dot{Q}]$, og godtgør, at $i\sqrt{3} \notin \dot{Q}(c)$.

Dernæst betragtes polynomiet $b(X) = X^2 - cX + 1$ over $\dot{Q}(c)$, og en rod (tilhørende $\dot{C}$) heri kaldes d. Vis, at $(2d^3 + 1)^2 + 3 = 4(d^6 + d^3 + 1) = 0$, og udled heraf, at $b(X)$ er irreducibel over $\dot{Q}(c)$.

Benyt de fundne resultater til at vise, at $X^6 + X^3 + 1$ er irreducibelt over $\dot{Q}$.

Opgave nr. 3.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$x'' + x = -2\cos t$$

og specielt den løsning $x = \varphi(t)$, for hvilken $\varphi(0) = -\frac{1}{2}$ og $\varphi'(0) = \pi$.

Find Fourierrækken for den periodiske funktion med perioden 2π, der i intervallet $[0,2\pi[$ stemmer overens med $\varphi(t)$.

Vink. Løsningerne til differentialligningen kan findes ved brug af de færdige formler, eller man kan benytte, at de også må være løsninger til den ligning, der fås ved til den givne ligning at addere den to gange differentierede ligning.