Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1965-66.

M A T E M A T I K 2 .

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 18. januar kl. 10 - 14.

Opgave nr. 1.

En 3-dimensional kvadrik Q er givet ved ligningen

$$\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}| \;-\; 2\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{x}}| = 0 ,$$

hvor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ p & q & -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{L}}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad p,q \in \dot{R} .$$

1) Vis, at Q er en hyperboloide eller en keglesnitskegle.

2) Undersøg, for hvilke p,q det er en hyperboloide med 1 net, og for hvilke det er en hyperboloide med 2 net.

3) Angiv koordinaterne for Q's centrum $\underline{a}$.

4) Vis, at der findes en af p og q uafhængig vektor $\underline{v}$, således at $\underline{a}$ for alle p,q opfylder ligningen $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{a}}| - \underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{a}}| = 0$. Giv en geometrisk fortolkning af denne ligning, idet rummet antages euklidisk.

Opgave nr. 2.

Lad α og β være komplekse tal, som er algebraiske over det rationale tallegeme $\dot{Q}$, og således at graden $[\dot{Q}(\alpha):\dot{Q}] = p$ og $[\dot{Q}(\beta):\dot{Q}] = q$, hvor p og q er forskellige primtal.

1) Vis, at $[\dot{Q}(\alpha,\beta):\dot{Q}] = pq$ (her betyder $\dot{Q}(\alpha,\beta)$ som bekendt det mindste tallegeme, der indeholder $\dot{Q}$ og α og β).

(Opgaven fortsætter)

Matematik 2. Prøve 1.

Vinteren 1965-66.

2) Vis, at $\dot{Q}(\alpha + \beta) = \dot{Q}(\alpha, \beta)$. (Man kan f.eks. bevise og benytte, at antagelsen $[\dot{Q}(\alpha + \beta):\dot{Q}] = [\dot{Q}(\alpha):\dot{Q}] = p$ vil medføre, at α er rod i et polynomium af grad mindre end p over $\dot{Q}(\beta)$).

3) Idet $\alpha = i\sqrt{2}$ og $\beta = \sqrt[3]{2}$, skal man angive et polynomium over $\dot{Q}(\alpha)$ med $\alpha + \beta$ som rod, og derefter bestemme det irreducible polynomium over $\dot{Q}$ som har $\alpha + \beta$ som rod.

Opgave nr. 3.

Find polerne for funktionen

$$\frac{z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

og de tilsvarende residuer. Find værdien af integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx \;.$$