Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1965.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Eksamen afholdes den 9. juni 1965.

Opgave nr. 1.

I et euklidisk 3-dimensionalt rum med ortonormal basis er givet en kvadrik med ligningen

$$B_0(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}_0\,\underline{\underline{x}}' = 5, \text{ hvor } \underline{\underline{B}}_0 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestem røringspunkterne for de med planen $x_1 = 0$ parallelle tangentplaner til kvadrikken.

Bestem en ny ortonormal basis således, at $B_0(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{x}})$ i den udtrykkes ved en diagonalmatrix og udtryk de gamle koordinater ved de nye.

Angiv arten af kvadrikken.

Undersøg om der i det 3-dimensionale rum eksisterer en parabolsk kvadrik med ligning

$$\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{x}}' - 2\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{x}}' = 5,$$

således at venstresiden i ligningen er et symmetrisk polynomium i (x_1,x_2,x_3).

Opgave nr. 2.

I alt det følgende er $(M,+,\cdot)$ en kommutativ ring med etelement, og I et ægte delideal i denne. Til I svarer en mængde $S(I)$ bestående af de elementer a, for hvilke der findes et $m \notin I$, som opfylder $ma \in I$.

1) Vis, at $I \subsetneq S(I)$.

(opgaven fortsættes)

2) Vis, at dersom $a \notin S(I)$ og $b \notin S(I)$, da vil $ab \notin S(I)$.
Hvad kan man - i det tilfælde, hvor $S(I)$ er et ideal i $(M,+,\cdot)$ - - heraf udlede om faktorringen $(M,+,\cdot)/S(I)$?

3) For et ideal I i $(M,+,\cdot) = (\dot{Z},+,\cdot)$ ønskes $S(I)$ angivet ved hjælp af frembringerelementet $c = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}$ for I.
For hvilke I indenfor $(\dot{Z},+,\cdot)$ bliver $S(I)$ et ideal ?

4) Vis for en vilkårlig hovedidealring $(M,+,\cdot)$, at dersom $S(I)$ er et ideal, så kan I ikke være fællesmængden af to effektivt større idealer.

5) Vis, at det for en vilkårlig ring $(M,+,\cdot)$ gælder, at hvis I ikke er fællesmængden af to effektivt større idealer, så er $S(I)$ et ideal (til eftervisningen af idealegenskaberne kan man med fordel bemærke, at for ethvert a er $\{m \mid ma \in I\}$ et ideal).

Opgave nr. 3.

Vis, at der for reelt $a \neq 0$ og $0 < x < 2\pi$ gælder

$$\exp(ax) = \frac{\exp(2\pi a)-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2+n^2}\right\}.$$

Vis, at rækken også er konvergent for $x = 0$, og find dens sum.

Fremstil $\exp(ax)$ i intervallet $0 < x < \pi$ ved rækkeudviklinger af formen

$$\exp(ax) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{og} \quad \exp(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$