Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1964-65.

MATEMATIK 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Eksamen afholdes den 18.januar 1965.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Vis, at ligningen

$$\cos(x + y + 3z) - 4\sin(x - y + z) - \exp z = 0$$

i en omegn af (0,0,0) bestemmer z implicit som en funktion af (x,y) med kontinuerte partielle afledede af vilkårlig orden. Beregn koefficienterne i Taylors grænseformel for denne funktion i punktet (x,y) = (0,0), idet leddene af 2.grad medtages.

Opgave nr. 2.

Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx.$$

Vink. Anvend residuesætningen på funktionen $\frac{e^{iz}}{\cosh z}$ og rektanglet

$\{z = x + iy \mid |x| \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq \pi\}$.

(fortsættes)

Opgave nr. 3.

Der er givet et n-dimensionalt vektorrum $(V,+,\mathbb{R})$, i hvilket der er valgt en basis.

Lad $B(\underline{x},\underline{x})$ være en positiv definit kvadratisk form, og lad $B_1(\underline{x},\underline{x})$ være $B(\underline{x},\underline{x}) + L(\underline{x})^2$, hvor $L(\underline{x})$ er en fra nulformen forskellig linearform. Idet de kvadratiske formers symmetriske matricer betegnes $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}}_1$, skal man vise, at $\det\underline{\underline{B}} < \det\underline{\underline{B}}_1$ (det kan ved beviset være fordelagtigt at benytte et passende basisskifte).

Opgave nr. 4.

Lad M være mængden af 2×2 matricer, hvis elementer tilhører $\mathbb{Z}$, og $(M,+,\cdot)$ den af disse ved sædvanlig matrixaddition og matrixmultiplikation dannede ring.

1) Vis, at mængderne

A af matricer af form $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$

B af matricer af form $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ (*)

C af matricer af form $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

er delringe af $(M,+,\cdot)$.

2) Gør rede for at mængden I af 2×2 matricer, hvis elementer er lige tal, udgør et ideal i $(M,+,\cdot)$.

Ved en homorfi med I som kerne vil M afbildes i en ring M_2 ("ringen af 2×2 matricer modulo 2"), og A, B og C afbildes i delringe A_2, B_2 og C_2 af denne (de kan repræsenteres ved at man lader matrixelementerne i (*) være restklasser modulo 2).

(opgaven fortsættes)

(opgave nr. 4. fortsat)

3) Vis, at de additive grupper A_2, B_2 og C_2 alle er isomorfe med den ikke-cykliske gruppe af orden 4.

4) Er nogen af ringene A_2, B_2 eller C_2 et integritetsområde ?

5) Vis, at ringene A_2 og B_2 er isomorfe.

6) Findes der én ring med 4 elementer, som ikke er isomorf med A_2, B_2 eller C_2 ?

Opgave nr. 5.

Vis, at i et legeme med karakteristik p er $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Lad $(L,+,\cdot)$ være legemet af restklasser af de hele tal modulo p (hvor p er et primtal), og lad e betegne dets etelement.

Vis, at polynomiet $a(X) = X^p - X - e$ ikke har nogen rod i L.

Vis, at hvis c (indeholdt i et legeme, der omfatter L) er rod i a(X), så er c + e også rod i a(X), og benyt dette til at skrive a(X) som produkt af førstegradspolynomier over L(c).

Vis, at a(X) er irreducibelt over L. Man kan f.eks. vise og benytte, at for et produkt b(X) af førstegradspolynomier over L(c) vil summen af rødderne i b(X) tilhøre ethvert legeme, som blot indeholder koefficienterne i b(X).