Københavns Universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1964.

MATEMATIK 2.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Eksamen afholdes den 12. juni 1964.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1

Angiv på en figur de mængder, hvori funktionen

$$z = f(x,y) = (2x-y+2)(3x+2y-6)(x-3y-3)$$

er positiv, nul, og negativ, og vis herved, at $f(x,y)$ har mindst et lokalt maksimumspunkt.

Vis, at koordinaterne til et vilkårligt lokalt ekstremumspunkt for $f(x,y)$ tilfredsstiller ligningerne

$$\frac{(3x+2y-6)(x-3y-3)}{-11} = \frac{(2x-y+2)(x-3y-3)}{5} = \frac{(2x-y+2)(3x+2y-6)}{7},$$

og vis herved, at $(f(x,y)$ har netop eet lokalt maksimumspunkt (x_0,y_0). Find punktet.

Opgave nr. 2.

Lad a være et reelt tal i intervallet $]0,1[$.

Gør rede for, at

$$f(z) = \frac{\exp az}{1+\exp z} \qquad (z = x+iy)$$

er en meromorf funktion i $\mathbb{C}$ med poler i punkterne $z = ip\pi$, p ulige. Find residuet

$$R(f,i\pi).$$

Anvend residuesætningen på funktionen $f(z)$ og figuren $F = \{z \mid |x| \leq r,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$, og udled herved formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp ax}{1 + \exp x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Opgave nr. 3.

Lad A og B være to forskellige, ikke-tomme centrumskvadrikker med ligninger henholdsvis $\underline{x}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}| = 1$ og $\underline{x}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{x}| = 1$, hvor $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er regulære matricer, og lad P være mængden af punkter $\underline{p} \in A$, for hvilke tangenthyperplanen i $\underline{p}$ til A også er tangenthyperplan til B.

Vis, at P's punkter tilfredsstiller en ligning af formen $\underline{x}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{x}| = 1$, hvor $\underline{\underline{C}}$ er en fra $\underline{\underline{A}}$ forskellig matrix.

Vis, at en tilstrækkelig betingelse for at P er tom, er, at $\underline{\underline{A}}^{-1} - \underline{\underline{B}}^{-1}$ er matrix for en definit kvadratisk form.

Giv i det to-dimensionale rum et eksempel, der viser, at den nævnte betingelse ikke er nødvendig.

Opgave nr. 4.

Lad $(L,+,\cdot)$ være en ægte delring af de rationale tals legeme, og således at L indeholder mængden $\mathbb{Z}$ af de hele tal. Ethvert element af L skrives som en uforkortelig brøk $\frac{m}{n}$.

Vis, at hvis $\frac{m}{n} \in L$, så vil $\frac{1}{n} \in L$.

Godtgør, at der findes en mængde P_L af primtal, således at L netop er mængden af de rationale tal, for hvilke nævnernes primdivisorer tilhører P_L.

Vis, at et vilkårligt ikke-trivielt ideal I i L netop er hovedidealet frembragt af m_I, hvor m_I er det mindste tal i $I \cap \mathbb{N}$. Angiv de værdier, som m_I kan antage.

Vis, at idealerne i L kan ordnes i en nedstigende kæde $I' \supset I'' \supset I''' \supset \dots$, hvis og kun hvis der netop er eet maximalideal, og angiv for hvilke P_L dette indtræffer.

Opgave nr. 5.

De i det følgende betragtede legemer er dellegemer af de komplekse tals legeme.

Vis, at polynomiet $X^3 - X^2 - 1$ er irreducibelt over de rationale tals legeme $\mathbb{Q}$. En rod i dette polynomium kaldes c; angiv graden $[\mathbb{Q}(c):\mathbb{Q}]$.

Angiv endvidere graden $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$, og vis ved hjælp af denne, at $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(c) = \mathbb{Q}$. Bestem graden $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},c):\mathbb{Q}]$, (hvor $\mathbb{Q}(\sqrt{2},c)$ betyder det mindste legeme, som indeholder $\sqrt{2}$ og c).

Man betragter desuden legemet $\mathbb{Q}(c\sqrt{2})$; godtgør, at graden $[\mathbb{Q}(c\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$ går op i 6.

Vis, at $c = c^4 - c^2 - 1 \in \mathbb{Q}(c\sqrt{2})$, og benyt dette til at udlede at $\mathbb{Q}(c\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},c)$.