Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1963-64.

MATEMATIK 2.

Skriftlig prøve 1.

Eksamen afholdes den 3. januar 1964.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Bestem Laurentrækken for den ved $f(z) = (z-1)^{-1}\ (2-z)^{-1}$ definerede funktion i den ved $1 < |z| < 2$ bestemte cirkelring.

Opgave nr. 2.

Lad U være enhedscirkelskiven og f: U ind i $\check{C}$ en holomorf afbildning, som tilfredsstiller betingelserne

$$f(0) = 0,\ Df(0) = 1,\ \forall z \in U \setminus \{0\}\quad (f(z) \neq 0).$$

Vis, at der eksisterer en holomorf afbildning h: U ind i $\check{C}$, som tilfredsstiller betingelsen

$$f(z^2) = (h(z))^2$$

for alle $z \in U$.

Opgave nr. 3.

Udregn

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{1-e^{iz}}\, dz,\ z = x + iy,$$

idet γ er en gren af hyperblen $x^2 - y^2 = 1$, fastlagt ved, at den ligger i den ved $x > 0$ bestemte halvplan, og ved, at gennemløbsretningen svarer til voksende y (Betragt en lukket integra-

(fortsættes)

tionsvej sammensat af en bue af γ og en lodret linie, der passerer midt mellem to på hinanden følgende nulpunkter for integrandens nævner).

Opgave nr. 4. ×

Man betragter et endeligtdimensionalt vektorrum over de reelle tal, og en på vektorrummet defineret kvadratisk form.

Vis, at mængden af de med hensyn til formen isotrope vektorer er et underrum, hvis og kun hvis formen er semidefinit.

Opgave nr. 5.

Lad $(M,+,\cdot)$ være en kommutativ ring hvori nulreglen gælder, og lad J være mængden af ikke-tomme delmængder I, for hvilke det gælder, at $a \in I \Rightarrow ax \in I$ for alle $x \in M$ (d.v.s. de delmængder der opfylder idealbetingelsen Id 2.).

Vis, at hvis ringen er således beskaffen, at af to vilkårlige (ens eller forskellige) elementer er det ene altid et multiplum af det andet, så er J netop mængden af idealer i ringen.

Vis, at hvis ringen ikke er således beskaffen, så vil J indeholde en mængde I som ikke er noget ideal (man kan f.eks. for et elementpar a,b betragte den mindste mængde, som indeholder a og b og tilhører J).

Opgave nr. 6.

Lad $(L,+,.)$ være legemet af restklasser af de hele tal modulo 3, og lad e betegne dets etelement.

Vis, at polynomiet $a(X) = X^3 - X + e$ er irreducibelt over L

En rod i $a(X)$ betegnes c.

(fortsættes)

Vis, at der ikke findes noget legeme $(M,+,\cdot)$, således at $L \subset M \subset L(c)$ (f.eks. ved at betragte elementantallene i de tilsvarende grupper).

Vis, at $a(X)$ går op i $X^{27} - X$.