Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1963.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 1.

Eksamen afholdes den 11. juni 1963.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Vis den for alle $n \in \dot{N}$ gyldige formel

$$\int_{\gamma} z^{n-1} e^{\frac{1}{z}} \, dz = \frac{2\pi i}{n!} ,$$

idet γ er enhedscirklen gennemløbet i positiv retning. Udled heraf den for alle $n \in \dot{N}$ gyldige formel

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\Theta} \cos(n\Theta - \sin\Theta) \, d\Theta = \frac{2\pi}{n!} .$$

Opgave nr. 2.

En i hele den komplekse plan meromorf funktion f er defineret ved

$$f(z) = \frac{1}{\sin nz} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(z + \frac{k}{n}\pi),$$

(fortsættes)

hvor n er et naturligt tal.

Vis, at f kan fortsættes analytisk i hele den komplekse plan. Vis relationen

$$\forall z(f(z + 2\pi) = f(z)).$$

Vis, at $f(x + iy); x,y \in \mathring{R}$ for $y \to \infty$ og for $y \to -\infty$ konvergerer ligeligt i x mod en konstant værdi. Udled heraf, at f er konstant.

Opgave nr. 3.

Lad $U \subset \mathring{C}$ være den ved $U = \{x+iy \mid |x|+|y| < 1\}$ definerede punktmængde. Vi sætter $E = \overline{U} \setminus \{1\}$. Lad f: E ind i $\mathring{C}$ være en afbildning, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1) er kontinuert,

2) restriktionen af f til U er analytisk,

3) $\forall\ z \in E \setminus U\ (|f(z)| \leqq 1)$,

4) $\forall\ z \in E\ \ (|f(z)| \leqq 2|1-z|^{-1})$.

Vis, at

$$\forall\ z \in E\ (|f(z)| \leqq 1).$$

(Beviset kan føres indirekte, idet antagelsen

$$\exists\ z_0 \in U\ (|f(z_0)| > 1)$$

medfører, at $|g_\varepsilon(z)|$, hvor $g_\varepsilon(z) = f(z)\ e^{\frac{\varepsilon}{z-1}}$, for passende $\varepsilon > 0$ får et maksimumspunkt i U).

Opgave nr. 4.

I et n-dimensionalt vektorrum $(V,+,\mathring{R})$ betragtes den kvadratiske form

$$B(\underline{x},\underline{x}) = (x_1+x_2+\ldots x_n)^2 - x_1{}^2-x_2{}^2-\ldots-x_n{}^2.$$

(fortsættes)

Angiv formens matrix, og bestem endvidere dens positivitetsindex og dens negativitetsindex.

Find for $n = 3$ arten af kvadrikken $B(\underline{x},\underline{x}) = 1$. Angiv dens beliggenhed i koordinatsystemet, og specielt hvilke af de otte ved koordinatplanerne bestemte oktanter, der indeholder punkter tilhørende kvadrikken.

Opgave nr. 5.

Lad $(M,+,\cdot)$ være en kommutativ ring, og lad $\underset{1}{\sim}$ og $\underset{2}{\sim}$ være to kongruensrelationer i ringen (d.v.s. ækvivalensrelationer harmonerende med kompositionsforskrifterne). Der defineres en ny relation $\sim$ i M ved at $a \sim b$ såfremt der findes et $c \in M$ således at $a \underset{1}{\sim} c$ og $b \underset{2}{\sim} c$. Vis, at $\sim$ er en kongruensrelation i $(M,+,\cdot)$.

Idet de til $\underset{1}{\sim}$, $\underset{2}{\sim}$ og $\sim$ svarende idealer i ringen betegnes hhv. I_1, I_2 og I, skal det vises, at $I = \{a_1+a_2 | a_1 \in I_1 \wedge a_2 \in I_2\}$.

Man kan sætte $I = I_1 \circ I_2$, idet man betragter I som fremgået ved en kompositionsforskrift $\circ$ indenfor mængden af idealer i ringen. Vis, at for ethvert ideal I_3 er

$$(I_1 \circ I_2) \cap I_3 \supseteqq (I_1 \cap I_3) \circ (I_2 \cap I_3).$$

Opgave nr. 6.

Lad $(L,+,\cdot)$ være et legeme med 3 elementer; nulelementet betegnes med o og etelementet med e. Vis, at $(L,+,\cdot)$ er isomorft med legemet af restklasser af de hele tal modulo 3.

(fortsættes)

Vis, at polynomiet eX^2+e er irreducibelt over L.

Idet en rod i dette polynomium betegnes c, skal man undersøge strukturen af $L(c) = L[c]$, idet antallet af elementer bestemmes, og det undersøges om grupperne $(L(c),+)$ og $(L(c)\setminus\{o\},\cdot)$ er cykliske.