Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1962-63.

M A T E M A T I K 2.

Skriftlig prøve 2.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 6 opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Om en kvadratisk form

$$B_n(\underline{v},\underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} v_i v_j, \qquad \beta_{ij} = \beta_{ji},$$

i $(\grave{R}^n,+,\grave{R})$ forudsættes, at

$$D_n = \det(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} > 0,$$

og at formen

$$B_{n-1}(\underline{v},\underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_{ij} v_i v_j$$

i $(\grave{R}^{n-1},+,\grave{R})$ er positiv definit. Vis, at B_n er positiv definit.

Vis dernæst, at en kvadratisk form $B_n(\underline{v},\underline{v})$ i $(\grave{R}^n,+,\grave{R})$ er positiv definit, hvis og kun hvis

$$D_r = \det(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,r} > 0 \quad \text{for } r = 1,\dots,n.$$

Opgave nr. 2.

Vis, at der blandt integralkurverne til differentialligningen

$$Dx = 2t - 2\,(|t^2 - x|)^{\frac{1}{2}}, \qquad (t,x) \in \mathring{R}^2\,,$$

findes en parabel samt uendelig mange halvlinier.

Bestem den delmængde af $\mathring{R}^2$, hvori differentialligningens højre side ikke opfylder nogen lokal Lipschitzbetingelse med hensyn til x, og gør rede for, at der gennem hvert punkt af denne mængde går uendelig mange integralkurver.

Opgave nr. 3.

Find en fundamentalmatrix for det homogene lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} Dx_1 &= -x_2 \\ Dx_2 &= x_1 \end{aligned}$$

og bestem derefter den løsning $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ til det inhomogene system

$$\begin{aligned} Dy_1 &= -y_2 + t \\ Dy_2 &= y_1 - t \end{aligned}$$

for hvilken $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$.

Opgave nr. 4.

Med D betegner vi den ved $\frac{1}{2}\pi < |z| < \frac{3}{2}\pi$ bestemte cirkelring i den komplekse plan. Med γ betegner vi den ved $|z| = \frac{3}{4}\pi$ bestemte cirkel. Vis den for $|z| > \frac{3}{4}\pi$ gyldige formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\operatorname{tg}\zeta \, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{z + \frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}\pi}\,.$$

Vis dernæst, at den del af Laurent-rækken for tg z i området D, hvor eksponenterne er negative, er

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(\tfrac{1}{2}\pi)^{2k}\, z^{-2k-1}.$$

Opgave nr. 5.

Med A vil vi betegne området

$$A = \{x + iy \mid |x| + |y| < 4\}.$$

Om en afbildning $f: A$ ind i $\mathring{C}$ er det givet, at

1) f er analytisk,

2) $\forall z \in A \ (|f(z)| < 1)$,

3) $f(1) = f(i) = f(-1) = f(-i) = 0$.

Vis, at

$$|f(0)| < \frac{1}{20}.$$

(Anvend f.eks. maksimumsprincippet på en passende hjælpefunktion).

Opgave nr. 6.

Med S betegner vi området

$$S = \{x + iy \mid |x| < \tfrac{1}{4}\pi \ \wedge \ y \in \mathring{R}\}.$$

Vis, at tg:S ind i $\mathring{C}$ er en énentydig afbildning af S på enhedscirklen U. Vis, at liniestykket med endepunkter $\pm iy$ afbildes på liniestykket med endepunkter $\pm i \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$.

Lad $f: S$ ind i $\mathring{C}$ være en analytisk funktion, som tilfredsstiller

1) $f(0) = 0$,

2) $\forall z \in S \ (|f(z)| < 1)$.

Bevis følgende påstand:

$$\forall y \in \mathring{R} \ \left(|f(iy)| \leq \frac{e^{2|y|} - 1}{e^{2|y|} + 1}\right).$$