Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1962.

MATEMATIK 2.

Skriftlig prøve 2.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse anses som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Lad $B_2(\underline{x},\underline{x})$ være en kvadratisk form i planen, således at $B_2(\underline{x},\underline{x}) = 1$ og $B_2(\underline{x},\underline{x}) = -1$ er ligninger for to hyperbler. Om vektorerne $\underline{a}$ og $\underline{b}$ forudsættes, at de er konjugerede med hensyn til B_2, at $\underline{a}$ er stedvektor til et punkt på den første, og at $\underline{b}$ er stedvektor til et punkt på den anden hyperbel. Vis, at hyperblernes tangenter i disse to punkter skærer hinanden på en af de fælles asymptoter.

Lad $B_3(\underline{x},\underline{x})$ være en kvadratisk form i rummet, således at $B_3(\underline{x},\underline{x}) = 1$ og $B_3(\underline{x},\underline{x}) = -1$ er ligninger for to hyperboloider. Om vektorerne $\underline{a}$ og $\underline{b}$ forudsættes, at de er konjugerede med hensyn til B_3, at $\underline{a}$ er stedvektor til et punkt på den første, og at $\underline{b}$ er stedvektor til et punkt på den anden hyperboloide. Vis, at hyperboloidernes tangentplaner i disse to punkter skærer hinanden i en tangent til asymptotekeglen $B_3(\underline{x},\underline{x}) = 0$.

Opgave nr. 2

Lad $(V_n,+,\mathbb{R},\|\ \|), n \geq 3$, være et vektorrum med indre produkt og $\underline{a} \neq \underline{0}$ en vektor i V_n. Med V_{n-1} betegnes det (n-1)-dimensionale underrum (hyperplanen) med ligningen $\underline{a}\cdot\underline{x} = 0$.

Find, udtrykt ved $\underline{a}$ og $\underline{v}$, ortogonalprojektionen af en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V_n$ på V_{n-1}.

(fortsættes)

(fortsat)

Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en ortonormalbasis for V_n, og antag, at $\underline{a} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$. Angiv, udtrykt ved $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, en ortonormal basis for V_{n-1}.

Opgave nr. 3.

Bestem de fra 0 forskellige egenværdier og tilhørende egenfunktioner for den symmetriske integraloperator k i rummet $C_2[-1,1]$ med kernen

$$K(s,t) = 3|s||t| - st, \qquad s,t \in [-1,1].$$

Undersøg, for hvilke reelle tal λ integralligningen

$$\lambda\varphi - k(\varphi) = t^3$$

har løsninger $\varphi(t)$, $t \in [-1,1]$, og angiv for hvert af disse tal samtlige løsninger.

Opgave nr. 4.

Bevis, at såfremt $(M,+,\cdot)$ er et endeligt kommutativt legeme, hvis etelement betegnes e, så har produktet af alle de fra nul forskellige elementer altid værdien -e (for visse specielle legemer er en særbetragtning eventuelt nødvendig).

Opgave nr. 5.

Lad $(M,+,\cdot)$ være en hovedidealring med etelementet e, og lad I være et ideal i ringen; med $\equiv$ betegnes den til I svarende kongruensrelation, d.v.s. at $x \equiv y$ er ensbetydende med at $x-y \in I$. Der defineres en ny relation $\sim$ i mængden M, ved at $x \sim y$ hvis, og kun hvis $x^2 \equiv y^2$. Lad endvidere I_4 betegne det af elementet 4e frembragte hovedideal.

Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation, og at den er harmonerende med multiplikationen.

Vis, at dersom $\sim$ desuden er harmonerende med additionen, så er $2e \sim 0$ og $I_4 \subsetneqq I$.

(fortsættes)

(fortsat)

Vis, at mængden K af elementer, hvis kvadrat tilhører I, er et ideal. Vis endelig, at dersom (M,+,·) er ringen af hele tal ($\mathbb{Z}$,+,·), og $I_4 \subsetneqq I$, så er $\sim$ netop den til idealet K svarende kongruensrelation.

Opgave nr. 6.

I det følgende er a et helt tal forskelligt fra -1, og

$$p(X) = (X-1)(X+1)(X-a) + 1 = (a+1) - X - aX^2 + X^3.$$

Vis, at betragtet som element i polynomiumsringen $\mathbb{Q}[X]$ er p(X) irreducibel. Hvad kan man sige om p(X) betragtet som element i $\mathbb{Z}[X]$?

Vis, at betragtet som element i potensrækkeringen $\mathbb{Q}[[X]]$ er p(X) regulær.

Undersøg for a = -2, a = 1 og a = 5 om p(X) betragtes som element i $\mathbb{Z}[[X]]$ er regulær, reducibel eller irreducibel. Hvis p(X) er reducibel ønskes angivet de tre første koefficienter i to ikke-regulære potensrækker, der har p(X) som produkt.