Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1962.

MATEMATIK 2.

Skriftlig prøve 1.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse anses som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 7 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Lad $\underline{\underline{B}}$ være en reel, symmetrisk og regulær $(n \times n)$-matrix. Med B og B^{-1} betegnes de to bilinearformer i talrummet $(R^n,+,R)$, hvis matricer er $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}}^{-1}$.

Vis, at hvis søjlerne $\underline{\underline{u}}_|$ og $\underline{\underline{v}}_|$ er konjugerede med hensyn til B, vil $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{u}}_|$ og $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{v}}_|$ være konjugerede med hensyn til B^{-1}.

Vis, at de til B og B^{-1} hørende kvadratiske former har samme signatur.

Opgave nr. 2.

Vis, at differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} tDx_1 &= \phantom{2x_1+{}} x_2 \\ tDx_2 &= 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 \qquad t > 0, \\ tDx_3 &= \phantom{2x_1+{}} x_2 \end{aligned}$$

har løsninger af formen

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 t^r \\ x_2 &= c_2 t^r \\ x_3 &= c_3 t^r, \end{aligned}$$

hvor r, c_1, c_2, c_3 er visse konstanter.

Angiv en fundamentalmatrix for systemet.

Opgave nr. 3.

Om den kontinuerte funktion $f: R^2 \to R$ forudsættes, at den

(fortsættes)

(fortsat)

for alle $(t,x_1),(t,x_2) \in \mathring{R}^2$ opfylder Lipschitz-betingelsen

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leqq L|x_2 - x_1|,$$

hvor L er en konstant. Vis ved hjælp af eksistenssætningen, at den løsning $\varphi(t)$ til differentialligningen

$$Dx = f(t,x),$$

for hvilken $\varphi(\tau) = \xi$, hvor τ og ξ er givne reelle tal, eksisterer i intervallet $[\tau - \frac{1}{2L}, \tau + \frac{1}{2L}]$.

Slut heraf, at hver løsning eksisterer for alle $t \in \mathring{R}$.

Opgave nr. 4.

Gør rede for, at relationerne (n helt tal)

$$\frac{d}{dz}(\cot z)^{n+1} = -(n+1)(\cot z)^n(1+\cot^2 z),$$

$$(\cot z)^n = (\cot z)^n(1+\cot^2 z) - (\cot z)^{n+2}$$

medfører, at residuerne i 0 for $(\cot z)^n$ og $(\cot z)^{n+2}$ for $n \geqq 0$ kun afviger ved fortegnet. Angiv derefter residuet i 0 for $(\cot z)^n$ som funktion af det hele tal n.

Opgave nr. 5

Vis følgende skærpelse af Liouvilles sætning (lærebogen III,1.2): Værdimængden for en i hele planen holomorf, ikke konstant funktion er overalt tæt i hele planen (sml. Weierstrass' sætning, lærebogen side 89).

Opgave nr. 6.

En integrationsvej γ består af halvlinierne

$$\gamma_1: z = -\frac{\pi}{2} + it, \quad t \in [0,\infty[$$

$$\gamma_2: z = \frac{\pi}{2} + it, \quad t \in [0,\infty[$$

samt liniestykket γ_3 fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$. Halvlinien γ_1 er orienteret efter aftagende t, medens γ_2 er orienteret efter voksende t.

Vis, at

(fortsættes)

(fortsat)

$$\int_{\gamma} z(\cot z + i)dz$$

er konvergent og har værdien 0. Vis derved, at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

Opgave nr. 7.

Lad U betegne enhedscirkelskiven $|z| < 1$, og lad $f:U$ <u>på</u> U være énentydig, og lad f og f^{-1} være holomorfe i U. Endelig antages, at $f(0) = 0$. Vis, at f er defineret ved et udtryk af formen $f(z) = \lambda z$, hvor $|\lambda| = 1$.