Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 40%)

1° Beregn buelængden på grafen $(x, y) = (t\,,\, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$, fra $P_0(0, 1)$ til et punkt $P = P_a(a\,, \cosh a)$, $a > 0$.

Grafen vil blive kaldt *kædelinien.* Med $P_0(0, 1)$ betegnes punktet P_0 med koordinater $(0, 1)$, og analogt.

2° Vis, at det punkt Q på kædeliniens tangent i P, der fås ved at afsætte stykket $\sinh a$ fra P bagud (dvs. skråt nedad) langs tangenten, har koordinaterne $(a - \tanh a\,,\, 1/\cosh a)$.

3° På en skitse af kædelinien skal man markere punkterne P og Q samt projektionen $R(a, 0)$ af P på førsteaksen X. Vis, at liniestykket QR er vinkelret på kædeliniens tangent i P, og find længden $|QR|$.

4° Lader man $P = P_t(t\,, \cosh t)$ gennemløbe højre del af kædelinien, fra $P_0(0, 1)$, vil $Q = Q_t$ beskrive en kurve γ med parameterfremstilling

$$\begin{aligned} x &= t - \tanh t \\ y &= 1/\cosh t \end{aligned}\quad ,\quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Vis, at γ har en tangent i $Q = Q_a$, $a > 0$, og at den er vinkelret på kædeliniens tangent i $P = P_a$.

5° Omdrejningsfladen, der fremkommer ved at dreje γ om andenaksen Y, er en glat C^1-flade. Det ønskes *ikke* vist. Angiv – med begrundelse – tangentplanen i $Q = Q_a$, f.eks. ved at angive to skærende linier i planen eller planens normal i Q.

Spørgsmålet bør besvares uden regning.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 30%)

1° For hvilke $(r,t) \in \mathbb{R}^2$ er rækken

$$(1) \qquad 1 + re^{it} + r^2 e^{2it} + \ \dots \ + r^n e^{int} + \ \dots$$

konvergent, og for hvilke er den divergent ? Begrund svaret, og angiv summen i tilfælde af konvergens.

2° Vis for vilkårligt $(r,t) \in \,]-1,1[\times\mathbb{R}$, at rækken

$$(2) \qquad 1 + r\cos t + r^2 \cos 2t + \ \dots \ + r^n \cos nt + \ \dots$$

er konvergent med sum

$$f(r,t) = \frac{1 - r\cos t}{1 + r^2 - 2r\cos t} \ .$$

3° Find værdien af $\int_0^\pi f(r,t)\,dt$ for hvert $r \in \,]-1,1[$. Regningen skal legitimeres. Find også planintegralet

$$\int_R \frac{1 - r\cos t}{1 + r^2 - 2r\cos t}\, d(r,t)$$

over rektanglet $R = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}\,,\ 0 \leqq t \leqq \pi\}$.

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 30%)

Om en kontinuert funktion $g\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ er givet, at

$$\int_0^x \cos^2(g(t))\,dt \ = \ g(x) \ \text{ for alle } \ x \in \mathbb{R}\,.$$

1° Gør rede for, at g er af klasse C^1 og tilfredsstiller differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y\ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2° Gør rede for, at Eksistens- og entydighedssætningen kan anvendes på $(*)$. Hvad fortæller sætningen om løsninger til $(*)$? Angiv en maksimal løsning gennem $(0, \frac{\pi}{2})$.

3° Find funktionen $g\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$.

Opgavesættet fortsættes på side 3