Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet januar 1996

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer. Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes, men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler. Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

1° Lad $h\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ være givet ved

$$h(t) = \sqrt{t^2+1} - t\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at h er aftagende, og bestem værdimængden.

Vink. Man kan have nytte af at vise, at $1/h(t) = \sqrt{t^2+1} + t$.

2° Vis, at differentialformen

$$\left(\frac{xy^2}{\sqrt{(xy)^2+1}} - y\right)dx + \left(\frac{x^2y}{\sqrt{(xy)^2+1}} - x\right)dy$$

er eksakt i $\mathbb{R}^2$, og find stamfunktionen $u\colon \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ med $u(0,0) = 1$.

3° Vis, at u har et og kun et stationært punkt, og afgør, om det er et ekstremumspunkt. Find også værdimængden for u.

Opgave 2

1° Undersøg, om potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}x^3 + \ \dots$$

er konvergent for $x = 1$, henholdsvis $x = -1$, og bestem konvergenstallet ρ.

2° Lad $f\colon \,]-\rho,\rho\,[\curvearrowright \mathbb{R}$ være rækkens sumfunktion i konvergensintervallet $]-\rho,\rho[$, og lad $F\colon \,]-\rho,\rho[\curvearrowright \mathbb{R}$ være en stamfunktion til f. Undersøg, om F har ekstremum i 0.

3° Vis, at Taylor rækken for F med 0 som udviklingspunkt er uniformt konvergent i intervallet $[-1,1]$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt den normerede, homogene lineære differentialligning

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0\,,$$

hvor p_0 og p_1 er kontinuerte reelle funktioner defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$. Lad $a \in I$, $b \in I$, $a < b$, og antag, at $p_0(t) < 0$ for alle $t \in \,]a,b[$.

1° Lad her $\varphi\colon I \curvearrowright \mathbb{R}$ være en løsning til $(*)$, hvor $\varphi(a) \geqq 0$ og $\varphi(b) \geqq 0$.

Vis da, at $\varphi(t) \geqq 0$ for alle $t \in [a,b]$.

Vink. Betragt et $\xi \in [a,b]$, hvor φ antager sin mindsteværdi i $[a,b]$. (Hvilken sætning anvendes her?) Bemærk, at $\varphi''(\xi) \geqq 0$, hvis $\xi \in \,]a,b[$. (Hvorfor?)

2° Lad her $\varphi\colon I \curvearrowright \mathbb{R}$ være en løsning til $(*)$, hvor $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Vis da, at $\varphi(t) = 0$ for alle $t \in [a,b]$. Gør derpå rede for, at φ falder sammen med nulløsningen på hele I.

3° Lad nu L betegne rummet af løsninger $\varphi\colon I \curvearrowright \mathbb{R}$ til $(*)$.

Vis så, at afbildningen $\varphi \curvearrowright (\varphi(a), \varphi(b))$ fra L til $\mathbb{R}^2$ er lineær og injektiv.

4° Vis, at der for hvert par af tal $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ findes en og kun en løsning $\varphi\colon I \curvearrowright \mathbb{R}$ til $(*)$, som opfylder betingelserne

$$\varphi(a) = c \;\text{ og }\; \varphi(b) = d\,.$$

Vink. Man kan supplere 3° med en dimensionsbetragtning.