Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

En kurve γ i rummet er givet ved parameterfremstillingen $u \curvearrowright A_u$, $u \in \mathbb{R}$, hvor $\overrightarrow{OA_u} = \mathbf{a}(u)$ i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ har koordinaterne

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Arctan} u - \tfrac{1}{2}u \\ y &= \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) \\ z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,u\,. \end{aligned}$$

1° Vis, at $|\mathbf{a}'(u)| = 1$, $\mathbf{a}'(u) \perp \mathbf{a}''(u)$ og $|\mathbf{a}''(u)| = \frac{1}{1+u^2}$ for alle $u \in \mathbb{R}$.

Når u gennemløber $\mathbb{R}$, beskriver den positive halvtangent T_u^+ til γ i A_u en flade med parameterfremstilling

$$(u,v) \curvearrowright \overrightarrow{OP}_{u,v} = \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a}(u) + v\,\mathbf{a}'(u)\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\,.$$

Vink til 2° og 3°: Undlad at regne i koordinater x, y, z.

2° Vis, at fladen er glat. Vis desuden, at den har samme tangentplan i alle punkter af halvtangenten T_u^+ til γ i et vilkårligt kurvepunkt A_u.

3° Vis, at $|\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)| = \frac{v}{1+u^2}$, og beregn arealet af fladestykket F svarende til rektanglet E i UV-planen, hvor

$$E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq u \leqq 1\,,\ 1 \leqq v \leqq 3\}\,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Det aritmetiske middeltal $A(a,b)$, *det geometriske middeltal* $G(a,b)$ og *det harmoniske middeltal* $H(a,b)$ af to tal $a\,, b \in \mathbb{R}_+$ defineres ved

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad G(a,b) = \sqrt{ab} \quad \text{og} \quad \frac{1}{H(a,b)} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\,, \text{ dvs. } H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}\,.$$

1° Find $H(1,2), G(1,2), A(1,2)$ samt $G(H(1,2), A(1,2))$.

2° Vis, at

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b\,, \quad \text{når } 0 < a < b. \tag{$*$}$$

Vink: Vis f.eks. , at $A(a,b)^2 - G(a,b)^2 > 0$, og derpå at $H(a,b) : G(a,b) < 1$.

I det følgende tænkes a og b givet, $0 < a < b$, og vi betragter de to talfølger (a_n) og (b_n) bestemt ved

$$a_1 = a\,,\ b_1 = b \quad \text{samt} \quad a_{n+1} = H(a_n, b_n)\,,\ b_{n+1} = A(a_n, b_n) \ \text{ for } n \in \mathbb{N}.$$

3° Vis, at $G(a_n, b_n) = G(a,b)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, samt at $a_n < b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

4° Opskriv $(*)$ anvendt på $a_n\,, b_n$ for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$. Begrund så, at talfølgerne (a_n) og (b_n) er konvergente, at de har samme grænseværdi : $\lim_n a_n = \lim_n b_n$, og at den fælles grænseværdi er $G(a,b)$.

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$t\frac{dx}{dt} + 2x = 2\cos(t^2)\,, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

1° Vis uden at løse $(*)$, at hvis 0 tilhører definitionsintervallet J for en løsning $\varphi J \curvearrowright \mathbb{R}$, så er $\varphi(0) = 1$. Vis også, at grafens tangent i $(0,1)$ må være vandret, hvis φ er to gange differentiabel.

2° Find alle løsninger til $(*)$ på $\mathbb{R}_+$.

3° Gør rede for, at der er netop én løsning $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ til $(*)$ defineret på hele $\mathbb{R}$, og find en potensrækkefremstilling af denne.