Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet januar 1995

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 3 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

1° Lad $f:\ \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = 2 + 2\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2} \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Gør rede for, at funktionen har en største- og en mindsteværdi i

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\,,\ x+y \leqq \pi\}\ ,$$

og find disse værdier samt de punkter i C, hvor værdierne antages.

Vink. Man kan få nytte af formlen $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$ samt af $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2° I en cirkel med radius 1 indskrives en firkant $ABCD$, således at siden AB er en diameter. (Tegn ! Vinkelspidserne A, B, C og D ligger på cirkelperiferien, i den nævnte rækkefølge.)

Find de mulige værdier af firkantens omkreds. Hvorledes opnås den størst mulige værdi ?

Vink. Vis, at firkantens omkreds er $f(x,y)$, når x og y er vinkelmålene for centervinklerne BOC og DOA. Her er O cirklens centrum, og $x > 0$, $y > 0$, $x+y < \pi$.

Opgave 2

1° Vis, at

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cosh v} \\ z &= \tanh v \end{aligned} \quad , \quad v \in \mathbb{R},$$

i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XZ fremstiller en halv periferi af enhedscirklen.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Hvad fremstiller

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cosh v}\cos u \\ y &= \frac{1}{\cosh v}\sin u \quad , \quad (u,v) \in \,]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}, \\ z &= \tanh v \end{aligned}$$

i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ? Beskriv parameterkurverne.

3° Lad

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(u,v)\,, \quad (u,v) \in \,]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$$

være den vektorielle form af parameterfremstillingen i 2°. Vis så, at

$$|\mathbf{r}'_u(u,v)| = |\mathbf{r}'_v(u,v)| \quad \text{og} \quad \mathbf{r}'_u(u,v) \perp \mathbf{r}'_v(u,v)$$

for vilkårligt (u,v) i parameterområdet.

4° En kurve på fladen (fra 2° eller 3°) er givet ved

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(t,\alpha t)\,, \quad t \in \,]-\pi,\pi[\,,$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Vis, at vinklen θ, hvorunder kurven skærer parameterkurverne med fast v, dvs. vinklen mellem kurvetangenterne, har den konstante størrelse Arctan α.

Vink. Gør rede for, at $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t,\alpha t) = \mathbf{r}'_u(t,\alpha t) + \alpha\mathbf{r}'_v(t,\alpha t)$, og tegn eventuelt en skitse af fladens tangentplan i $Q_t = P_{t,\alpha t}$.

Opgave 3

1° Marker de tre rødder 1, α og β i ligningen

$$t^3 - 1 = 0$$

på en skitse af den komplekse plan, således at α har positiv imaginærdel. Gør rede for, at $1 + \alpha + \beta = 0$, samt at $\alpha^2 = \beta$ og $\beta^2 = \alpha$.

2° Find mængden $L_{\mathbb{C}}$ af løsninger $y\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ til differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$$

og vis, at den løsning φ, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\varphi(0) = 1\,,\ \varphi'(0) = 0\,,\ \varphi''(0) = 0\,,$$

kan skrives

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}(e^x + e^{\alpha x} + e^{\beta x})\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 3 fortsættes på side 3

Vink. Det kan lette regningerne at bruge betegnelserne α og β for de to ikke-reelle rødder i karakterligningen i stedet for at benytte de eksplicitte udtryk.

3° Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

er konvergent for hvert $x \in \mathbb{R}$, og find summen $f(x)$.