Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

1° Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,,$$

når γ er linjestykket γ_1 fra $(1,0)$ til $(r,0)$ fulgt af cirkelbuen γ_2 med centrum i $(0,0)$, der går fra $(r,0)$ til $(r\cos v\,,\, r\sin v)$ i positiv omløbsretning. Det antages, at $r > 1$ og $0 < v < 2\pi$.

2° Udtryk resultatet i 1° ved x og y, når $(x,y) = (r\cos v\,,\, r\sin v)$.

Bevis derpå, at værdien af kurveintegralet er den samme for enhver C^1-kurve γ fra $(1,0)$ til $(r\cos v\,,\, r\sin v)$, der løber i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3° Find løsningskurverne i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ til differentialligningen

$$\frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = 0\,.$$

Opgave 2

1° For $n \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{R}$ sættes

$$f_n(t) = \cos\frac{t}{n}\,.$$

Gør rede for, at funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er punktvis konvergent på $\mathbb{R}$, og angiv grænsefunktionen $f:\ \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$. – Er konvergensen uniform på $\mathbb{R}$? Begrund svaret.

2° Lad $b \in \mathbb{R}_+$. Til givet $\varepsilon \in]0,2]$ ønskes fundet et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$1 - \cos\frac{t}{n} < \varepsilon \ \text{ for alle } n > N \text{ og alle } t \in [0,b]\,.$$

Vink. Det kan være en hjælp at inddrage tallet $\delta \in]0,\pi]$ givet ved $\cos\delta = 1-\varepsilon$.

3° Lad $b \in \mathbb{R}_+$. Gør rede for, at talfølgen

$$\left(\int_0^b \cos\frac{t}{n}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

er konvergent, og find grænseværdien.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad (\sinh t)\frac{d^2x}{dt^2} - (\cosh t)\frac{dx}{dt} = -1\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1° For løsninger til $(*)$, hvis grafer skærer 2. akse, ønskes vist, at grafernes tangenter i de respektive skæringspunkter alle er parallelle.

2° Vis, at $\sinh : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ er en løsning til $(*)$.

3° Find alle løsninger til $(*)$ på $\mathbb{R}_+$.