Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1994

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 40%)

1° Vis, at differentialformen

$$2\,\frac{x}{y^2}dx \;-\; 2\,\frac{x^2+1-y}{y^3}\,dy$$

er eksakt i $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$, og find den stamfunktion $u\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+ \curvearrowright \mathbf{R}$, hvor $u(0,1)=0$.

2° Find eventuelle stationære punkter for $u\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+ \curvearrowright \mathbf{R}$.
Vis, at u har en mindsteværdi, og bestem værdimængden $u(\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+)$.

3° Find den maksimale løsningskurve gennem $(0,\frac{1}{2})$ til differentialligningen

$$xy\,dx \;-\; (x^2+1-y)dy \;=\; 0\,, \quad (x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+\,,$$

og vis, at det er en parabel.

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 30%)

1° Vis, at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2\sin^2 y}\cos y\,dy \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{x}\operatorname{Arctan} x & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0\,. \end{cases}$$

2° Find en potensrækkefremstilling af funktionen

$$x \curvearrowright g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2\sin^2 y}\cos y\,dy\,, \quad x\in\,]-1,1[\,.$$

3° Find en rækkefremstilling af tallet

$$a = \int_E \frac{1}{1+x^2\sin^2 y}\cos y\,d(x,y)\,,$$

hvor E er rektanglet $[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Gør tillige rede for, at $|a-\frac{1}{2}|<\frac{1}{72}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1994
Matematik 1 MA

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 30%)

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = t^x , \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} .$$

1° Undersøg, om Eksistens- og entydighedssætningen kan anvendes.
I bekræftende fald: Hvad fortæller sætningen om $(*)$?

2° Vis, at enhver funktion $\varphi\colon J \curvearrowright \mathbf{R}$ defineret på et interval $J \subseteqq \mathbf{R}_+$, der er løsning til $(*)$, er af klasse C^2.
Vink. Hvad betyder det, at $\varphi\colon J \curvearrowright \mathbf{R}$ er en løsning til $(*)$?
Nu og/eller senere kan du få nytte af at udlede et passende udtryk for $\varphi''(t)$.

3° Lad her $\varphi\colon J \curvearrowright \mathbf{R}$ være en løsning til $(*)$ gennem $(1,2)$.
Find da $\varphi'(1)$ og $\varphi''(1)$ og opskriv Taylor polynomierne af 1. og 2. orden for φ ud fra 1.