Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1993

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

Lad XYZ være et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem i rummet.

1° Indtegn for vilkårlige $u, v \in \mathbf{R}$ de tre punkter $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$ og $Q(x, y)$ på en skitse af XY-planen, når

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos u \\ y_1 &= \sin u \end{aligned}\ , \qquad \begin{aligned} x_2 &= -v\sin u \\ y_2 &= v\cos u \end{aligned}\ , \qquad \begin{aligned} x &= \cos u - v\sin u \\ y &= \sin u + v\cos u \end{aligned}\ .$$

Beregn afstanden fra $(0,0)$ til Q. Beskriv bevægelsen af Q_1, Q_2 og Q for fast $v \in \mathbf{R}$, når u tolkes som tiden.

Betragt nu fladen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (u, v) \in \mathbf{R}^2 .$$

2° Beskriv parameterkurverne. Hvorledes kan fladen tænkes frembragt?

3° For vilkårligt $b \in \mathbf{R}$ skal man gøre rede for, at $(1, b, b)$ ligger på fladen, og at fladen har en tangentplan i punktet. Find desuden en ligning for tangentplanen.

4° Vis, at arealet af det fladestykke, der afskæres mellem planerne med ligning $z = 0$ og $z = c$, $c \in \mathbf{R}_+$, er lig med

$$\pi\sqrt{2}\int_0^a \cosh^2 t\, dt ,$$

hvor $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh a$.

(Fladestykket svarer til parameterfiguren $[0, 2\pi] \times [0, c]$.)

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

1° Vis, at rækken

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

er uniformt konvergent på $[0,\infty[$.
(Det forudsættes kendt, at $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er konvergent.)

2° Idet $f\colon [0,\infty[\curvearrowright \mathbf{R}$ er rækkens sumfunktion, skal man finde

$$\int_0^1 f(x)dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 f(x)dx\,.$$

3° Vis, at rækken

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

er konvergent for hvert $x \in [0,\infty[$, og at sumfunktionen $F\colon [0,\infty[\curvearrowright \mathbf{R}$ er differentiabel.
Vink: Betragt $\int_0^x f(t)dt$.

4° Vis, at rækken

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$$

er divergent for hvert $x \in [0,\infty[$.

Opgave 3

Betragt differentialligningen

(*) $$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2\,, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

1° Lad her $\varphi\colon I \curvearrowright \mathbf{R}$ være en løsning, der ikke antager værdien 0.
Vis da, at $x \curvearrowright y = 1/\varphi(x)$, $x \in I$, ligeledes er en løsning.

2° Gør rede for, at der gennem hvert punkt $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ går en og kun en løsning med maksimalt definitionsinterval.

3° Find de konstante løsninger med maksimalt definitionsinterval.

4° Find samtlige maksimale løsninger i den strimmel mellem grafer for konstante løsninger, hvori X-aksen ligger.
Vink: For $y \neq \pm 1$ er $\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)$.

5° Find samtlige maksimale løsninger i $\mathbf{R}^2$.
(Man kan med fordel udnytte 1°.)