Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1993

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

Sæt $A = [0,1] \times [0,1]$, og lad $f \colon A \curvearrowright \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,, \quad (x,y) \in A\,.$$

1° Gør rede for, at f har såvel en størsteværdi G som en mindsteværdi g i A.

2° Vis for $(x,y) \in A^\circ$, at

$$(x,y) \text{ er et stationært punkt for } f \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1\,.$$

3° Find G og g samt de punkter i A, hvor henholdsvis G og g antages.

Opgave 2

1° Vis, at

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

for hvert $x \in \,]-1,1[$.
(Det tæller ikke at finde rækken i en formelsamling.)

2° Beregn summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}\,.$$

(Det tæller ikke at henvise til en formelsamling.)

3° Lad $f \colon \,]-1,1[\, \curvearrowright \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} & \text{for } x \in \,]-1,1[\, \setminus \{0\} \\ 1 & \text{for } x = 0\,. \end{cases}$$

Gør rede for, at f er sumfunktion for en potensrække.
Find også en potensrækkefremstilling af f'.
Undersøg monotoniforholdene for f, og bestem funktionens værdimængde.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2} = 3y^{2/3}\,, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

1° Vis, at det for enhver løsning φ gennem et punkt $(a,0)$ på X-aksen gælder, at grafen har X-aksen som tangent i punktet.

2° Løs $(*)$ i halvplanen $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$.
Mere præcist: Find alle løsninger $x \curvearrowright y = \varphi(x)$, $x \in I$, hvis graf ligger i halvplanen, og hvor intervallet I er maksimalt under dette krav.

3° Fra nu af betragtes $(*)$ pány i $\mathbf{R}^2$.
Gennem hvert punkt på X-aksen går der flere løsninger med maksimalt definitionsinterval. For $(0,0)$ kan f.eks. nævnes

$$x \curvearrowright y = x^3\,,\ x \in \mathbf{R}\,, \quad \text{og} \quad x \curvearrowright y = 0\,,\ x \in \mathbf{R}\,.$$

Hvorfor strider det ikke mod (Eksistens- og) entydighedssætningen for en differentialligning af 1. orden ?

4° Angiv samtlige løsninger gennem $(0,0)$ med maksimalt definitionsinterval. (Begrundelse kræves ikke.)