Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Noter, bøger, notater og formelsamlinger kan medbringes,
men *ikke* lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 40%)

1° Vis, at differentialformen

$$(y\cos x)dx + (\sin x)dy$$

er eksakt i $\mathbf{R}^2$, og find en stamfunktion $u\colon \mathbf{R}^2 \curvearrowright \mathbf{R}$.

2° Undersøg, om $u\colon \mathbf{R}^2 \curvearrowright \mathbf{R}$ har lokale ekstremumspunkter.

3° Find de maksimale løsningskurver til differentialligningen

$$(y\cos x)dx + (\sin x)dy = 0$$

i strimmelen $]-\pi,\pi[\times\mathbf{R}$.

4° Vis, at $x \curvearrowright 1/\cos x$, $x \in \,]0,\frac{\pi}{2}[$, er en løsning til differentialligningen

$$(\sin x)\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \quad x \in \,]0,\tfrac{\pi}{2}[\,.$$

Find alle løsninger i intervallet $]0,\frac{\pi}{2}[$.

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 30%)

En flade er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= v \\ y &= \cosh v\,\sin u\,, \qquad (u,v) \in \,]-\pi,\pi[\times\mathbf{R}\,. \\ z &= \cosh v\,\cos u \end{aligned}$$

På vektoriel form skrives

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(u,v)\,, \quad (u,v) \in \,]-\pi,\pi[\times\mathbf{R}\,.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

1° Vis, at fladen er glat, og at

$$|\mathbf{r}'_u(u,v)| = |\mathbf{r}'_v(u,v)| \quad \text{for alle } (u,v) \in \,]-\pi,\pi[\, \times \mathbf{R}\,.$$

Find vinklen mellem (tangenterne til) de to parameterkurver gennem et vilkårligt punkt $P = P_{u,v}$ på fladen.

2° Beskriv de to parameterkurver gennem $(b, 0, \cosh b) = P_{0,b}$. (Art og beliggenhed?) Find fladens tangentplan i $(0,0,1) = P_{0,0}$.

3° En kurve på fladen er givet ved

$$\begin{matrix} u = t \\ v = t \end{matrix} \quad , \quad t \in \,]-\pi,\pi[\,.$$

Tegn vektorerne $\mathbf{r}'_u(t,t)$, $\mathbf{r}'_v(t,t)$ og $d\mathbf{r}/dt = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t,t)$ på en skitse, hvor fladens tangentplan i punktet $P_{t,t}$ er lagt ned i papiret. Bestem kurvens vinkel med parameterkurverne gennem $P_{t,t}$.

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 30%)

1° Vis, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n = 1 + 3z + 5z^2 + \ldots + (2n+1)z^n + \ldots$$

har konvergensradius 1. Begrund, at rækken er divergent i hvert punkt af konvergenscirkelens rand.

2° Sæt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n \quad \text{for } z \in \mathbf{C}\,,\ |z| < 1\,.$$

Find en potensrækkefremstilling af $g(z) = f(z) - zf(z)$, $|z| < 1$, og vis herved, at

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z}\,, \quad |z| < 1\,.$$

Udregn $f(z)$ for hvert $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$.

3° Find summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}\,.$$

Vis, at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}i^n = \tfrac{4}{25} + i\tfrac{22}{25}\,,$$

og find summen af rækken

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{4p+1}{4^p}\,.$$