Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

1° Vis, at differentialformen

$$x(1-y^2)\,dx \;+\; y(1-x^2)\,dy$$

er eksakt i $\mathbb{R}^2$, og find en stamfunktion $u : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$.

2° Undersøg, om u har lokalt ekstremum i $(1,1)$.

3° Find de stationære punkter for u. Gør rede for, at u har en største- og en mindsteværdi i cirkelskiven

$$\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 4\,\}\,,$$

og find de punkter i cirkelskiven, hvor mindsteværdien antages.

Opgave 2

1° Gør rede for, at

$$\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j \log j} \;\geqq \int_2^n \frac{1}{\log t} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$. Udregn integralet og slut, at rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

er divergent.

2° Betragt talfølgen $(c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots)$, hvor

$$c_n = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j \log j} \;-\; \log\log n\,, \quad n = 3, 4, \ldots\,.$$

Vis, at $c_{n+1} - c_n \geqq 0$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$.

Gør videre rede for, at følgen (c_n) er konvergent, og at

$$\lim_{n\to\infty} c_n \leqq \frac{1}{2 \log 2} - \log\log 2\,.$$

Vink. Man kan have nytte af en arealbetragtning. Tegn skitse.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 10\cos t\,, \quad t \in \mathbf{R}\,.$$

1° Gør rede for, at der findes en løsning $\psi : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}$ med $\psi(0) = 1$, der har lokalt ekstremum for $t = 0$. Opskriv Taylor udviklingen til anden orden af ψ ud fra 0 og afgør, om ψ har lokalt maksimum eller minimum i 0.

2° Find samtlige reelle løsninger $\varphi : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}$ til $(*)$.