Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1991

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

I halvplanen $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$ er vektorfeltet $\mathbf{k}$ givet ved

$$\mathbf{k}(x,y) = \left(\frac{-x^2y^3}{x^6+y^6}, \frac{x^3y^2}{x^6+y^6} \right), \quad (x,y) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R} .$$

1° Udregn kurveintegralerne $\int_{\gamma_1} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$ og $\int_{\gamma_2} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$, hvor

γ_1 er liniestykket fra $(1,0)$ til $(1,b)$,

γ_2 består af liniestykket fra $(1,0)$ til $(a,0)$ fulgt af liniestykket herfra til (a,b).

Her er $a > 1$ og $b > 0$.

2° Vis, at $\mathbf{k}$ har en stamfunktion i $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$, og find en.

3° Find $\int_\gamma \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$, når γ er cirkelbuen i $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$ fra $(1,-1)$ til $(1,1)$ med centrum i $(0,0)$.

Opgave 2

Betragt potensrækken

$$(*) \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(\log\log n)^2 n \log n} .$$

1° Find konvergenstallet ρ .

Vink. Vis først for $n \to \infty$, at $\sqrt[n]{\log n} \to 1$ og $\sqrt[n]{\log\log n} \to 1$.

2° Undersøg, om rækken er konvergent for $x = 1$, henholdsvis $x = -1$.

3° Undersøg, om sumfunktionen $f : \,]-\rho,\rho[\, \curvearrowright \mathsf{R}$ for $(*)$ har lokalt ekstremum for $x = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Sæt $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$ og

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x} \quad \text{for } (x,y) \in \Omega\,.$$

1° Find $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = D_1\tilde{f}(x,y)$ og $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = D_2\tilde{f}(x,y)$ for hvert $(x,y) \in \Omega$.

2° Find en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, således at

$$\tilde{g}(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{for hvert } t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\,,$$

og gør rede for, at $\tilde{g} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \curvearrowright \mathbf{R}$ kan udvides til en funktion $g : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}$ af klasse C^∞. Angiv $g(0)$ og $g'(0)$.

3° Gør rede for, at $\tilde{f} : \Omega \curvearrowright \mathbf{R}$ kan udvides til en funktion $f : \mathbf{R}^2 \curvearrowright \mathbf{R}$ af klasse C^∞. Find $f(0,y)$, $D_1 f(0,y)$ og $D_2 f(0,y)$ for hvert $y \in \mathbf{R}$.

Vink: $\tilde{f}(x,y) = y\frac{\sin(xy)}{xy} = y\tilde{g}(xy)$ for $x \neq 0\,, y \neq 0$.