Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1.

Funktionen $g : \mathbf{R}^2 \curvearrowright \mathbf{R}$ er givet ved

$$g(x,y) = \tfrac{1}{2}(x+y) - \operatorname{Arctan}(xy)\,, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

1° Find Taylor udviklingen til 2. orden af g ud fra $(1,1)$ og undersøg, om g har lokalt maksimum, resp. minimum i punktet.

2° Lad $f : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}^2$ være differentiabel i 0 med $f(0) = (2,0)$ og $f'(0) = (4,-2)$. Begrund da, at $g \circ f$ er differentiabel i 0, og find $(g \circ f)(0)$ og $(g \circ f)'(0)$.

Opgave 2.

Talfølgen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ er givet ved

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ \ldots \ \cdot \ 2n}\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

1° Find konvergenstallet for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

2° Vis, at $\log(1-t)$ er af samme størrelsesorden som t for $t \to 0$.

3° Vis, at rækken

$$-\log\frac{1}{2} - \log\frac{3}{4} - \ \ldots\ - \log\frac{2n-1}{2n} - \ \ldots \ = \sum_{n=1}^{\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

er divergent.

4° Vis, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$. (Vink. Hvad fortæller 3° om $\log a_n$?)

5° Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ er konvergent.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3.

Betragt differentialligningen

$$(1-\cosh t)\frac{dx}{dt} + (\sinh t)x = 2\sinh t\,.$$

1° Find eventuelle konstante løsninger.

2° Find samtlige løsninger $\varphi : \mathbf{R}_+ \curvearrowright \mathbf{R}$.

3° Find samtlige løsninger $\varphi : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}$.

4° Find samtlige løsninger $\psi : \mathbf{R}_+ \curvearrowright \mathbf{R}$ til differentialligningen

$$(1-\cosh t)\frac{d^2y}{dt^2} + (\sinh t)\frac{dy}{dt} = 2\sinh t\,.$$