Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.
Sættet er fælles for studerende efter ny og gammel studieordning.

Opgave 1

1° Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\,dy$$

langs en kurve γ, der går fra $(0,0)$ til et punkt $(a,b) \neq (0,0)$ med $r = \sqrt{a^2+b^2} < 1$, og som består af liniestykket γ_1 fra $(0,0)$ til $(r,0)$ fulgt af en cirkelbue γ_2 med centrum i $(0,0)$.

2° Vis, at differentialformen

$$\frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\,dy$$

er eksakt i cirkelskiven $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, og find en stamfunktion.

Opgave 2

1° Vis, at

$$\tfrac{1}{2}t\log\frac{1+t}{1-t} = t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} + \ldots + \frac{t^{2n}}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1}$$

for hvert $t \in \,]-1,1[$.

Vink: $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$ for hvert $t \in \,]-1,1[$.

2° Vis, at potensrækken

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} + \ldots + \frac{x^n}{2n-1} + \ldots$$

har konvergenstallet $\rho = 1$, og angiv summen $f(x)$ for hvert $x \in [0,1[$.

3° Find summen $f(x)$ af potensrækken $(*)$ for hvert $x \in \,]-1,0[$.

Vink: Sæt $x = -t^2$ med $t \in \,]0,1[$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

1° Lad $f : \Omega \curvearrowright \mathbf{R}$ være af klasse C^1 på den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, lad $\varphi : I \curvearrowright \mathbf{R}$ være differentiabel på intervallet $I \subseteq \mathbf{R}$ og antag, at

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \text{for alle } t \in I \,.$$

Begrund da, at funktionen $t \curvearrowright f(t, \varphi(t))$, $t \in I$, er differentiabel, og udtryk dens afledede ved $D_1 f$, $D_2 f$, φ, φ' og t.

2° Antag her, at $\varphi : I \curvearrowright \mathbf{R}$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)\,, \quad (t, x) \in \Omega\,.$$

Vis da, at φ er af klasse C^2, og udtryk $\varphi''(t)$ ved $D_1 f$, $D_2 f$, φ, f og t.

3° Lad nu $\varphi : I \curvearrowright \mathbf{R}$ være en løsning gennem $(1, 1)$ til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sinh(x - t^2)\,, \quad (t, x) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Find $\varphi'(1)$ og $\varphi''(1)$. Opskriv Taylor udviklingen til 2. orden af φ ud fra 1. Har φ lokalt maksimum eller minimum i 1, eller ingen af delene?