Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1989-90

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 40%)

En flade er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= v\cosh u \\ y &= v\sinh u \quad , \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2 \, . \\ z &= v \end{aligned}$$

1° Beskriv art og beliggenhed af parameterkurverne gennem $(1,0,1)$. Gør rede for, at fladen er en kegleflade, og angiv toppunktet samt en ledekurve. (Jf. s.0.1.22.)

2° Gør rede for, at fladen i hvert punkt $\neq (0,0,0)$ har en tangentplan, og at denne går gennem $(0,0,0)$. Find en ligning for tangentplanen i $(1,0,1)$.

3° Udregn den eksakte værdi af fladeintegralet

$$\int_F \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \, ,$$

når F er fladestykket svarende til $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 25%)

1° Vis, at rækken

$$(*) \qquad \log\frac{1}{x} + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \dots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \cdots$$

er konvergent for hvert $x \in \mathbf{R}_+$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Vis, at rækkens sumfunktion $f : \mathbf{R}_+ \curvearrowright \mathbf{R}$ har en mindsteværdi, og at denne antages for $x = \log 2$.
(Hverken mindsteværdien eller funktionen f ønskes bestemt.)

Opgave 3. (Omtrentlig vægt 35%)

1° For $t \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ skal vises, at

$$2 \operatorname{Arcsin} t = \operatorname{Arctan} \frac{2t\sqrt{1-t^2}}{1-2t^2} .$$

Vink: Sæt $v = \operatorname{Arcsin} t$ og benyt, at

$$\tan 2v = \frac{2 \sin v \cos v}{1 - 2\sin^2 v} .$$

2° Begrund, at der gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in \Omega$ går højst én maksimal løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = 2\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-t^2}} , \quad (t,x) \in \Omega = \left]-1,1\right[\times \mathbf{R} .$$

3° Find $\psi'(0)$, når $\psi : I \curvearrowright \mathbf{R}$ er en løsning til $(*)$ med $\psi(0) = 0$.

4° Find en løsning $\varphi : \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\curvearrowright \mathbf{R}$ til $(*)$ med $\varphi(0) = 0$.
Vis endelig, at φ er en maksimal løsning.