Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommer 1989

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

I den åbne strimmel $\Omega = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbf{R}$ er funktionen $f : \Omega \curvearrowright \mathbf{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \text{Arctan}\,(y \tan x), \quad (x,y) \in \Omega .$$

1° Angiv værdimængden for f. Begrund svaret.

2° Find eventuelle stationære punkter for f.

3° Har f et lokalt ekstremumspunkt ? Begrund svaret.
Vink: Overvej fortegn for f.

4° Kan f udvides til en kontinuert funktion på den afsluttede strimmel $\overline{\Omega}$? Begrund svaret.

5° Opskriv en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $(\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4})$.

Opgave 2

1° Find dekompositionen i det reelle af

$$\frac{3x-3}{x^3+1}$$

og find en stamfunktion i hvert af intervallerne $]-\infty, -1[$ og $]-1, \infty[$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har koefficienterne

$$\left.\begin{aligned} a_{3p} &= 0 \\ a_{3p+1} &= (-1)^p \frac{1}{3p+1} \\ a_{3p+2} &= (-1)^{p+1} \frac{1}{3p+2} \end{aligned}\right\} \quad p = 0, 1, 2, \dots .$$

Bestem konvergenstallet ρ og find rækkesummen

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \cdots$$

for hvert $x \in \,]-\rho, \rho[$.

Vink: Én metode er at søge $f'(x)$. Du får dog ikke nødvendigvis brug for 1°.

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1-x)^2}{2t} \quad , \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} .$$

1° Find eventuelle konstante løsninger.

2° Begrund, at ingen af de øvrige løsninger antager værdien 1, samt at de alle er voksende.

3° Løs differentialligningen.

4° Begrund, at definitionsintervallet for en maksimal løsning x med værdier > 1 er af typen $]0, b[$ med $b \in \mathbf{R}_+$, og undersøg $x(t)$ for $t \to 0_+$ og for $t \to b_-$.

5° Løs differentialligningen

$$2\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{y^2}{t^2} \quad , \quad (t, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} .$$

Vink: Sæt $y = tx$.