Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1988/89

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

Gør rede for, at funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\,, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,,$$

har såvel en største- som en mindsteværdi, og find disse.

Opgave 2

1° Vis, at differentialformen

$$\frac{y^2}{(x+y)^2}dx \;+\; \frac{x^2}{(x+y)^2}dy$$

er eksakt i halvplanen $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y > 0\}$, og find en stamfunktion.

2° Bestem tangenten i $(1,1)$ til løsningskurven gennem $(1,1)$ til differentialligningen

$$\frac{y^2}{(x+y)^2}dx \;+\; \frac{x^2}{(x+y)^2}dy \;=\; 0\,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1988/89
Matematik 1 MA

Opgave 3

Funktionen $f : \mathbf{R} \curvearrowright \mathbf{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0\ . \end{cases}$$

1° Vis, at $f(x)$ kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$.

Vis desuden, at

$$f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2n+1} \quad \text{for alle } n \in \mathbf{N}\,.$$

2° Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}$$

er konvergent med sum e^{-1}.

Vink. Inddrag f'.