Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1988

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 40%)

I et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ i rummet er en flade givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \cosh v \; \cos u \\ y &= \cosh v \; \sin u \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 . \\ z &= \sinh v \end{aligned}$$

1° Vis, at fladen er glat, og at parameterkurverne skærer hinanden under ret vinkel.

2° Beskriv art og beliggenhed af parameterkurven svarende til

$$(a) \quad u = 0 , \qquad (b) \quad v = 0 , \qquad (c) \quad v = v_0 \text{ for vilkårligt } v_0 \in \mathbb{R} .$$

Hvorledes kan fladen tænkes frembragt?

3° Find en ligning for fladens tangentplan i $(1,0,0)$.

4° Find strømmen af vektorfeltet med konstant feltvektor $\underline{k} = (0,0,1)$ op gennem den del af fladen, der afskæres mellem planerne med ligninger $z = 0$ og $z = 1$. (Parameteren u indskrænkes til et interval af længde 2π.)

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 30%)

1° Bestem konvergenstallet ρ og sumfunktionen i konvergensintervallet $]-\rho, \rho[$ for hver af potensrækkerne

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} , \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} .$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Vis, at rækken

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^{2n})}{n}$$

er konvergent med sum $\log(1+x+x^2)$ for hvert $x \in]-1,1[$.

Er rækken uniformt konvergent i intervallet $]-1,1]$? Begrund svaret.

3° Vis, at rækken (3) er divergent for hvert $x \in \mathbf{R}$ med $|x| > 1$.

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 30%)

1° Vis, at grafen for funktionen

$$x \curvearrowright y = \tan\frac{x}{2}\,, \; x \in]-\pi,\pi[\,,$$

er en løsningskurve til differentialligningen

$$(*) \qquad y\,dx - \sin x\,dy = 0\,.$$

2° Find

$$\int_\gamma y\,dx - \sin x\,dy\,,$$

når γ er

(a) vejen fra $(0,0)$ til $(\frac{\pi}{2},1)$ langs grafen i 1° .

(b) liniestykket fra $(0,0)$ til $(\frac{\pi}{2},1)$.

3° Find alle maksimale løsningskurver til $(*)$ i strimmelen $]-\pi,\pi[\times\mathbf{R}$.

Vink. Begynd med $]0,\pi[\times\mathbf{R}$ eller $]0,\pi[\times\mathbf{R}_+$.