

Matematik 1 MA

Opgaver til besvarelse på 3 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

Idet $0 < b < a$, er en flade givet i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned}x &= (a + b \cos v) \cos u \\y &= (a + b \cos v) \sin u, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2. \\z &= b \sin v\end{aligned}$$

Vektoren med de anførte koordinater betegnes $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$.

- 1° Find $|\underline{r}'_u|$ og $|\underline{r}'_v|$. Vis, at fladen er glat, og bestem vinklen mellem parameterkurverne gennem et vilkårligt punkt på fladen.
- 2° Vis, at $(a + b, 0, 0)$ ligger på fladen, og bestem tangentplanen i punktet. Find $d\underline{r}((0, 0), (\Delta u, \Delta v))$.
- 3° Find arealet af fladestykket F svarende til et rektangel $E = [c, d] \times [0, 2\pi]$ i UV -planen, hvor $0 < d - c < 2\pi$.

Opgave 2

Givet potensrækken $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$, hvor

$$a_n = \frac{2n}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} + \frac{1}{n + 1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

- 1° Bestem konvergensintervallet $] -\rho, \rho[$. Undersøg, om rækken er konvergent for $x = \rho$, henholdsvis for $x = -\rho$.
- 2° Find rækkens sum for hvert $x \in] -\rho, \rho[$.

Opgave 3

I \mathbb{R}^2 er givet differentialligningen

$$(*) \quad (3x^2 - 2xy - y^2)dx + (-x^2 - 2xy + 3y^2)dy = 0 .$$

- 1° Undersøg, om der er linier med parameterfremstilling $(x, y) = (t, at)$, $t \in \mathbb{R}$, som er løsninger.
- 2° Vis, at differentialformen på venstre side af (*) er eksakt, og find en stamfunktion.
- 3° Find et punkt $(1, b)$, så der går en løsningskurve til (*) gennem punktet med vandret tangent i punktet. Opskriv en ligning i x og y , som tilfredsstilles af løsningskurvens punkter.