Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1987

M A T E M A T I K 1 MA

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \cosh(x^2 + y^2 + 2x + 2y) , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

1° Find de stationære punkter for f.

2° Find Taylor udviklingen til 2. orden af f ud fra $(0,0)$ og bestem arten af grafens oskulerende paraboloide i $(0,0,f(0,0))$.

3° Bestem værdimængden for f. Find samtlige punkter, hvor f har (lokalt eller globalt) ekstremum.

Opgave 2

1° Vis, at

$$\frac{1}{2N^2} \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{2(N-1)^2} ,$$

hvor $N \in \mathbb{N}$, i sidste ulighed dog $N \in \mathbb{N}$, $N \geqq 2$.

Vink: Begynd f.eks. med at vise, at der for $m \in \mathbb{N}$, $m \geqq N$, gælder

$$\int_N^{m+1} \frac{1}{t^3}\,dt \leqq \sum_{n=N}^{m} \frac{1}{n^3} \leqq \int_{N-1}^{m} \frac{1}{t^3}\,dt .$$

(Opgaven fortsættes)

2^o Vis, at rækken

(*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

er konvergent for hvert $x \in [0, \infty[$, og at konvergensen er uniform i $[a, \infty[$ for hvert $a \in]0, \infty[$.

Vink: For $x > 0$ er $\frac{nx}{1+n^4x^2} < \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x}$.

Lad $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ være sumfunktionen for rækken (*) i $[0, \infty[$.

3^o Vis, at
$$f\left(\frac{1}{N^2}\right) \geqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{N^2}{2n^3} \geqq \frac{1}{4} \quad \text{for } N \in \mathbb{N}.$$

Vink: For $n \geqq N$ er $1 \leqq n^4/N^4$.

4^o Vis, at (*) ikke er uniformt konvergent i intervallet $[0, \infty[$.

Opgave 3

1^o Gør rede for, at gennem hvert punkt $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}_+^2$ går højst én maksimal løsning til differentialligningen

(1) $$t\frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{x}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Find eventuelle konstante løsninger. Find derpå den fuldstændige løsning. Beskriv løsningernes grafer geometrisk (angiv kurvernes art og beliggenhed).

2^o Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

(2) $$\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{t} - \frac{t}{y}, \quad (t,y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Vink: Sæt $y = tx$.