Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1986/87

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.

Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.

Sættet er på 4 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 20%)

Betragt vektorfeltet $\underline{k}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ defineret i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ved

$$f(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$g(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

a) Lad $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ således at $\rho = \sqrt{x^2+y^2} > 1$.
Find $\int_\gamma \underline{k} \cdot d\underline{r}$, dels når γ er liniestykket fra $(1,0)$ til $(\rho,0)$, og dels når γ er cirkelbuen med centrum i $(0,0)$ fra $(\rho,0)$ til (x,y) taget i den positive omløbsretning.

b) Vis, at $\underline{k}(x,y)$ er et gradientfelt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og find en stamfunktion.

c) Bestem løsningskurven gennem $(1,0)$ til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 20%)

En reel funktion f defineret på $]-\frac{3}{2}, \infty[$ er givet ved

$$f(x) = \frac{5+3x}{2x^2+7x+6}$$

a) Dekomponer den rationale funktion $f(x)$.

b) Find for $|x| < \frac{3}{2}$ en kvotientrække med sum $\frac{1}{2x+3}$.
Find derpå en potensrækkefremstilling af $f(x)$ med 0 som udviklingspunkt og bestem dens konvergenstal.

c) Find den stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$, som opfylder $F(\frac{1}{2}) = \log 5$.

d) Find en potensrækkefremstilling af $F(x)$ i en omegn af 0.

Opgave 3. (Omtrentlig vægt 20%)

I XT-planen betragtes differentialligningen

$$(*)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^2}\right)x = 6(1+t^2)$$

a) Vis, at funktionen $x = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, er løsning til den homogene ligning.

b) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

Opgavesættet fortsættes.