Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1986

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 4 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 20%)

Hyperbelgrenen

$$x = \sqrt{1+v^2}, \quad z = v, \quad v \in \mathbb{R},$$

i XZ-planen drejes omkring Z-aksen i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ . Herved fremkommer en omdrejningsflade med parameterfremstilling

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+v^2}\cos u \\ y &= \sqrt{1+v^2}\sin u \\ z &= v \end{aligned} \quad .$$

Det er åbenbart en C^∞-flade.

1° Vis, at fladen er glat.

2° Vis, at punktet P_0 med koordinater $(1,1,1)$ ligger på fladen, og find en ligning for fladens tangentplan i punktet.

3° Vis, at arealet af det stykke F af fladen, der ligger mellem planerne $z = 0$ og $z = b$, hvor $b \in \mathbb{R}_+$, er lig med

$$2\pi \int_0^b \sqrt{1+2v^2}\, dv\,.$$

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 15%)

På den afsluttede 1. kvadrant $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ er funktionen $f: A \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} x\log(x+y) & \text{for } (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(Opgaven fortsættes)

1° Vis, at $f: A \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er kontinuert i $(0,0)$.

Vink. Det forudsættes kendt, at $t \log t \to 0$ for $t \to 0_+$.

2° Find $B = \{(x,y) \in A \mid f(x,y) \leqq 0\}$ og angiv mængden på en skitse. Begrund, at funktionen $f: A \rightsquigarrow \mathbb{R}$ har en mindsteværdi, og find værdimængden $f(A)$.

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 25%)

1° Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{t^n}{n!}$$

er konvergent for alle $t \in \mathbb{R}$. Summen kaldes $G(t)$.
Find for hvert $t \in \mathbb{R}$ værdien af $G'(t)$, udtrykt uden summationstegn.

2° Vis, at den afledede af funktionen

$$x \rightsquigarrow \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

er begrænset. Vis derpå, at funktionen

$$(t,x) \rightsquigarrow \frac{x^2 G'(t)}{1+x^2}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

opfylder en Lipschitz betingelse i enhver strimmel

$$S = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leqq t \leqq b\},$$

hvor $-\infty < a < b < \infty$.

Hvad kan du nu slutte om løsninger til differentialligningen

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 G'(t)}{1+x^2}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad ?$$

3° Find, udtrykt ved $G(t)$, den maksimale løsning til $(*)$, som opfylder $x(0) = 1$.

(Opgavesættet fortsættes)