Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1985/86

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (Omtrentlig vægt 20%)

Vi betragter funktionen $f: A \to \mathbb{R}$, hvor

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

og

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + x^2 - 2y^2 , \quad (x,y) \in A .$$

1° Begrund, at f har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi i A, og bestem disse.

2° Find Taylor udviklingen til 2. orden af f ud fra $(0,0)$ og undersøg, om f har lokalt ekstremum i punktet.

Opgave 2 (Omtrentlig vægt 20%)

Løs differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} t\frac{dx}{dt} &= x - y + 2t - 2 \\ t\frac{dy}{dt} &= -x + y + t + 2 \end{aligned}\right. , \quad (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 .$$

Vink. Indfør nye ubekendte funktioner $\tilde{x}$ og $\tilde{y}$, enten ved lurenkig eller ved

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ er en passende matrix.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3 (Omtrentlig vægt 20%)

For vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ er følgen $(s_n(z))$ givet ved

$$s_1(z) = 0, \quad s_2(z) = 1$$

og $$s_n(z) = z\, s_{n-2}(z) + (1-z) s_{n-1}(z) \quad \text{for } n \geqq 3 .$$

1° Find den række

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots ,$$

der har følgen $(s_n(z))$ som afsnitsfølge.

Vink. For $n \geqq 2$ er $f_n(z) = s_n(z) - s_{n-1}(z)$.

2° Find mængden A af punkter $z \in \mathbb{C}$, for hvilke følgen $(s_n(z))$ er konvergent, og find for hvert $z \in A$ grænseværdien $s(z) = \lim s_n(z)$.

3° Er konvergensen $s_n(z) \to s(z)$ uniform for $z \in A$? Begrund svaret.

Opgave 4 (Omtrentlig vægt 25%)

I et 3-dimensionalt vektorrum V er valgt en basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.
En kvadratisk form K_B på V er givet ved

$$K_B(x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3) = 7x_1^2 + 37x_2^2 + 56x_3^2 - 28x_1x_2 - 64x_2x_3 + 14x_3x_1 .$$

1° Opskriv den matrix $\underline{\underline{B}}$, som i basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ repræsenterer den til K_B hørende symmetriske bilinearform B .

2° Find B's positivitetsindeks p .

3° Find en ny basis $(\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3)$ i hvilken B repræsenteres af en diagonalmatrix.

4° Angiv koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{T}}$ hørende til overgangen fra $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ til $(\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \underline{\tilde{a}}_3)$.

(Opgavesættet fortsættes)