Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 20%)

1^o Vis, at der for $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cos\frac{x}{2^3} \cdots \cos\frac{x}{2^n} \sin\frac{x}{2^n} .$$

2^o Vis, at rækken

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log \cos\frac{x}{2^n}$$

er punktvis konvergent i intervallet $]0\,,\pi[$, og find dens sumfunktion.

3^o Hvorledes kan rækken

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\frac{x}{2^n}$$

fås ud fra (1) ? Vis, at (2) er uniformt konvergent i intervallet $]0\,,\pi[$, og find dens sumfunktion. (Det bør træde klart frem, hvilke sætninger om uendelige rækker der benyttes.)

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 20%)

I det geometriske rum med et udvalgt punkt O betragtes vektorfeltet, hvor feltvektoren $\underline{V}$ i det vilkårlige punkt P har længden

$$|\underline{V}| = \frac{r}{1+r^4} \,, \quad \text{med } r = |\underline{r}| \,, \ \underline{r} = \overrightarrow{OP} \,,$$

og hvor $\underline{V}$ for $P \neq O$ er rettet bort fra O .

(Opgaven fortsættes)

(Opgave 2 fortsat)

1° Idet XYZ er et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt O, skal man opskrive koordinaterne til feltvektoren $\underline{V}$ i punktet P med koordinater (x,y,z).

2° Vis, at $\underline{V}$ er et gradientfelt, og find en stamfunktion.

3° Find for $\rho \in \mathbb{R}_+$ strømmen $S = S(\rho)$ af vektorfeltet $\underline{V}$ ud gennem kuglefladen med centrum O og radius ρ. Udregn også $\operatorname{div} \underline{V}$ og udtryk resultatet ved $r = |\overrightarrow{OP}|$.

Hvilken sammenhæng må man, ud fra betragtning af en tynd kugleskal, vente mellem $S'(r)$ og $\operatorname{div} \underline{V}$?

Opgave 3. (Omtrentlig vægt 20%)

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad t\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + tx = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1° Vis, at $\varphi'(0) = 0$ for enhver løsning $\varphi: I \rightsquigarrow \mathbb{R}$, hvor 0 tilhører definitionsintervallet I.

2° Gør uden at løse (*) rede for, at mængden

$$A = \{\varphi: \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ er løsning til } (*) \text{ og } \varphi(\pi) = 0\}$$

er et vektorrum af dimension 1.

3° Find, udtrykt ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, en løsning til (*), som ikke er nulfunktionen. Bestem rækkens konvergenstal og dens sum. Bestem endelig A.

(Opgavesættet fortsættes)