Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1984/85

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 4 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad (f_n) og (g_n) være to følger af funktioner fra $[-1,1]$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}$$

$$g_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

1^o Vis at følgerne (f_n) og (g_n) begge er punktvis konvergente på $[-1,1]$ og find deres grænsefunktioner f og g.

2^o Vis at ingen af følgerne er uniformt konvergent på $[-1,1]$.

3^o Undersøg om

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \text{for} \quad n \to \infty$$

og om

$$\int_{-1}^{1} g_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} g(x)\,dx \qquad \text{for} \quad n \to \infty.$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2 (Vægt 20%)

En flade er givet ved parameterfremstillingen

$$(*)\qquad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} v^2 \cos 2u \\ y &= \tfrac{1}{2} v^2 \sin 2u\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,. \\ z &= v \cos u \end{aligned}$$

1° Gør rede for, at der er tale om en glat C^∞-flade. Find en ligning for tangentplanen i det til $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \sqrt{2}$ svarende punkt af fladen.

2° Vis, at mængden

$$E = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \tfrac{\pi}{2}\,,\quad 1 \le v \le 2\}$$

ved (*) afbildes bijektivt på sit billede F.

3° Udregn den eksakte værdi af fladeintegralet

$$\int_F \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\sigma \quad .$$

Opgave 3 (Vægt 20%)

Lad $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion og lad $\underline{k} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ være vektorfeltet givet ved

$$\underline{k}(x,y) = g(r)(-y,x)\,, \qquad (x,y) \neq (0,0)\,,$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

1° Find cirkulationen af $\underline{k}$ langs cirklen γ_ρ med centrum $(0,0)$ og radius $\rho \in \mathbb{R}_+$, gennemløbet i positiv omløbsretning.

(opgaven fortsættes)

2^{o} Betragt den til $\underline{k}$ svarende differentialform

$$-g(r)ydx + g(r)xdy \ .$$

Vis at denne er lukket netop når g er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r} \ , \qquad r \in \mathbb{R}_+ \ .$$

3^{o} Det oplyses at $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \leq 0 \wedge y = 0\}$ er et enkelt-sammenhængende område. Bestem mængden af C^1-funktioner $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for hvilke

$$\underline{k}(x,y) = g(r)(-y,x) \ , \qquad (x,y) \in \Omega \ ,$$

er et gradientfelt.