Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1984

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse på 5 timer.

Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.

Sættet er på 4 sider og består af 5 opgaver samt et algoritmeark. Ekstra eksemplarer af algoritmearket kan fås hos den tilsynsførende.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 20%)

1° Vis, at differentialformen

$$(x + \sin(x+2y) + x\cos(x+2y))dx + (y + 2x\cos(x+2y))dy$$

er eksakt i $\mathbb{R}^2$, og bestem den stamfunktion $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som opfylder, at $u(0,0) = 0$.

2° Undersøg, om u har lokalt ekstremum i $(0,0)$.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 20%)

1° Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n-1}x \cos x , \quad x \in \mathbb{R},$$

er punktvis konvergent på $\mathbb{R}$, og angiv sumfunktionen. Vis dernæst, at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval $[-a,a] \subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, men ikke på $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

2° Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \sin^{2n-1}t \cos t \, dt$$

er konvergent for $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, og udregn summen.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3. (Omtrentlig vægt 20%)

Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 6x_2 - 6\,e^{2t}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1 + e^{2t} \qquad , \qquad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 .$$

Opgave 4. (Omtrentlig vægt 25%)

Lad $f\colon \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, hvortil der hører matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} .$$

1^0 Begrund, at $\lambda_1 = 0$ er en egenværdi for f .

2^0 Det oplyses, at $\lambda_2 = -1$ og $\lambda_3 = 2$ også er egenværdier for f . (Bevis herfor ønskes ikke.) Find en basis $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$ for $\mathbb{R}^3$, som diagonaliserer f .

3^0 Lad $g\colon \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, hvortil der hører matricen $\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{A}})$. Vis, at den i 2^0 fundne basis $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$ også diagonaliserer g .

4^0 Vis, at for alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ er $g(\underline{x})$ ortogonalprojektionen af $\underline{x}$ på underrummet $g(\mathbb{R}^3)$.

(Opgavesættet fortsættes)