Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1989.

MATEMATIK 1 LD

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 5 opgaver og er på 6 sider.

Opgaverne starter på side 2, **men læs først denne side grundigt.**

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	35%	Stilopgave i lineær algebra
2	15%	Stilopgave i grafteori
3	15%	Opgave i grafteori
4	20%	Opgave i lineær algebra
5	15%	Opgave i lineær algebra

Stilopgaver

I besvarelser af stilopgaver bør hovedtrækkene klart fremgå, og detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Når der henvises til resultater fra andre dele af noterne, bør dette **ikke** ske ved henvisning til afsnitsnummer. De resultater, der henvises til, bør formuleres (i den udstrækning, tiden tillader det).

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

Opgave 1 (Vægt 35%)

LA1 **Injektive matricer**

(a) Giv definitionen af injektivitet for matrix.

(b) Formuler og bevis injektivitetssætningen.

(c) Definer lineær uafhængighed for sæt af søjler, og formuler og bevis en sætning, der viser forbindelsen mellem dette begreb og injektivitet af en matrix.

(d) Bevis, at produktet af to injektive matricer er en injektiv matrix ●

Opgave 2 (Vægt 15%)

G2 **Todelte grafer**

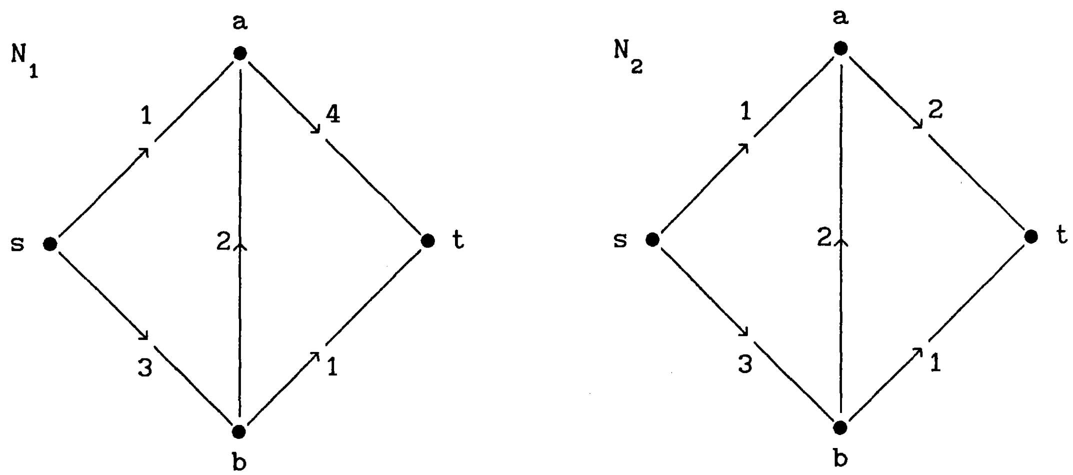
(a) Angiv definitionen af, at en graf er todelt.

(b) Bevis, at enhver kreds i grafen Γ har lige længde, hvis og kun hvis Γ er todelt ●

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 3 (Vægt 15%)

I denne opgave betragtes de to transportnetværk N_1 og N_2 :



(a) Bestem en maksimal strømning i N_1 og en maksimal strømning i N_2 .

(b) Bestem samtlige minimale snit i N_1 og samtlige minimale snit i N_2 .

(c) Bestem samtlige kritiske kanter i N_1 og samtlige kritiske kanter i N_2 .

(c) Bestem samtlige optimale kanter i N_1 og samtlige optimale kanter i N_2 •

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 4 (Vægt 20%)

For $c \in \mathbb{R}$ betragtes matricen:

$$A(c) = \begin{bmatrix} \frac{c^2+c}{2} & 0 & \frac{c^2-c}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ \frac{c^2-c}{2} & 0 & \frac{c^2+c}{2} \end{bmatrix} .$$

(a) Bestem for ethvert $c \in \mathbb{R}$ de karakteristiske rødder for $A(c)$ og disses rodmultiplicitet.

(b) Bestem for ethvert $c \in \mathbb{R}$ tallene:

$\operatorname{ind}_+ A(c)$, $\operatorname{ind}_- A(c)$ og $\operatorname{rg} A(c)$.

(c) Bestem for ethvert $c \in \mathbb{R}$ en ortogonal matrix $Q(c)$, så matricen $Q(c)^{-1}A(c)Q(c)$ er en diagonalmatrix, og angiv denne. (Vink: Begynd med det tilfælde, hvor der er 3 forskellige karakteristiske rødder for $A(c)$.) ●

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 5 (Vægt 15%)

I denne opgave sættes:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved, at B er ε_4-matricen for f mht. ε_4, altså ${}_{\varepsilon_4}[f]_{\varepsilon_4} = B$ (idet ε_4, som sædvanlig, betegner den naturlige basis for $\mathbb{R}^4$).

(a) Bestem en basis for kernen $\ker f$ og en basis for billedet $f(\mathbb{R}^4)$.

For enhver basis α for $\mathbb{R}^4$ betegner $r(\alpha)$ antallet af søjler i matricen ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$, der er forskellige fra nulsøjlen $0_{4\times 1}$.

(b) Begrund, at der for enhver basis α for $\mathbb{R}^4$ gælder: $r(\alpha) \geq \text{rg}\, B$.

(c) Bestem en basis β for $\mathbb{R}^4$ med $r(\beta) = \text{rg}\, B$, og bestem β-matricen ${}_{\beta}[f]_{\beta}$ for f mht. β ●

HUSK AT UDFYLDE NÆSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer: Personnummer:

Sæt kryds:	Klasse efterår 88	Lærer
	Mat-kemi	Ryszard Nest
	1	Hans-Bjørn Foxby
	2	Søren Vagner
	3	Ryszard Nest
	4	Birger Friis
	5	Inge Futtrup Christensen
	6	Ib Jørgensen
	7	Sten Hansen
	8	Peter Trosborg
	9	Asmus Schmidt
	10	Martin Olsen
	11	Dorte Olesen

Har du tidligere været til skriftlig prøve i Matematik 1LD?

Sæt kryds: ☐ nej

☐ ja Hvornår?

Sæt kryds:	Eksamenstermin
	januar 1989
	maj 1988
	januar 1988
	maj 1987
	januar 1987
	1986 eller tidligere