Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1989

MATEMATIK 1 LD

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 5 opgaver og er på 6 sider.

Opgaverne starter på side 2, **men læs først denne side grundigt.**

Bedømmelse.

Opgaverne bedømmes af den lærer, der afmærkes på arket sidst i opgavesættet. Arket vedlægges opgavebesvarelsen.

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	35%	Stilopgave i lineær algebra
2	15%	Stilopgave i grafteori
3	15%	Opgave i grafteori
4	20%	Opgave i lineær algebra
5	15%	Opgave i lineær algebra

Stilopgaver

I besvarelser af stilopgaver bør hovedtrækkene klart fremgå, og detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Når der henvises til resultater fra andre dele af noterne, bør dette **ikke** ske ved henvisning til afsnitsnummer. De resultater, der henvises til, bør formuleres (i den udstrækning, tiden tillader det).

Opgave 1 (Vægt 35%)

LA3 **Rang af matricer**

(a) Giv definitionen af rang af matrix.

(b) Bevis, at rangen af en matrix er det største antal søjler i et lineært uafhængigt sæt af søjler i matricen.

(c) Bevis, at rangen af en matrix er antallet af søjler i et maksimalt lineært uafhængigt sæt af søjler i matricen.

(d) Bevis, at der for enhver $m \times n$-matrix A og enhver **invertibel** $m \times m$-matrix R gælder:

$\operatorname{rg} RA = \operatorname{rg} A$ og $\ker RA = \ker A$.

Det antages for bekendt, at der for enhver $m \times n$-echelonmatrix F med netop r initialettaller gælder:

(*) $\operatorname{rg} F = r$ og $\dim \ker F = n - r$,

og dette ønskes **ikke** yderligere uddybet.

(e) Formuler og bevis dimensionssætningen for matricer ●

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 2 (Vægt 15%)

G3 **Transportnetværk**

(a) Angiv definitionen af kritisk kant samt af optimal kant.

(b) Bevis, at hvis f er en maksimal strømning i et netværk, da findes et snit $\mathcal{S}$ med kapacitet $c(\mathcal{S}) = F(f)$ ●

Opgave 3 (Vægt 15%)

Lad $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{K})$ være en simpel todelt graf med todeling $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$.

(a) Bevis, at der gælder $v(p_1) \le |\mathcal{P}_2|$ for alle $p_1 \in \mathcal{P}_1$ og $v(p_2) \le |\mathcal{P}_1|$ for alle $p_2 \in \mathcal{P}_2$.

Antag yderligere, at der findes $q_1 \in \mathcal{P}_1$ og $q_2 \in \mathcal{P}_2$ med $v(q_1) + v(q_2) = |\mathcal{P}|$.

(b) Bevis, at Γ er sammenhængende.

(c) Bevis, at Γ er et træ, hvis og kun hvis enhver kant i Γ har q_1 eller q_2 som endepunkt ●

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 4 (Vægt 20%)

For $c \in \mathbb{R}$ betragtes matricen:

$$A(c) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & (c-1)^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem de karakteristiske rødder for $A(c)$, og angiv mængden:

$\mathcal{S} = \{ c \in \mathbb{R} \mid A(c)$ har 3 forskellige karakteristiske rødder $\}$.

(b) Angiv mængden:

$\mathcal{O} = \{ c \in \mathbb{R} \mid A(c)$ er ortogonalt diagonaliserbar $\}$,

og bestem for ethvert $c \in \mathcal{O}$ en ortogonal matrix S, så $S^{-1}AS$ er en diagonalmatrix.

(c) Bestem mængden:

$\mathcal{D} = \{ c \in \mathbb{R} \mid A(c)$ er reelt diagonaliserbar $\}$ ●

Opgave 5 (Vægt 15%)

For $d \in \mathbb{R}$ betragtes matricerne:

$$B(d) = \begin{bmatrix} d & d-1 & 0 \\ 0 & d-1 & d(d-1) \\ 2d & 2d-2 & d(d-1) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad F(d) = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & 0 \\ 0 & 0 & d(d-1) \end{bmatrix} .$$

(a) Bevis, at $B(d) \sim F(d)$.

(b) Bestem en invertibel 3x3-matrix R , så $RB(d) = F(d)$.

(c) Løs for ethvert $d \in \mathbb{R}$ ligningen $B(d)X = C(d)$, hvor:

$$C(d) = \begin{bmatrix} 2d-1 \\ 2d-1 \\ 5d-2 \end{bmatrix} .$$

- o O o -

HUSK AT UDFYLDE NÆSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer:

Sæt kryds:	Klasse efterår 87	Lærer (bedømmer opgavesættet)
	Mat-kemi	Ryszard Nest
	1	Hans-Bjørn Foxby
	2	Søren Vagner
	3	Ryszard Nest
	4	Birger Friis
	5	Inge Futtrup Christensen
	6	Ib Jørgensen
	7	Sten Hansen
	8	Peter Trosborg
	9	Asmus Schmidt
	10	Martin Olsen
	11	Dorte Olesen

Har du tidligere været til prøve i Matematik 1LD ?

Sæt kryds: ☐ nej

☐ ja

Hvornår?

Sæt kryds:	Eksamenstermin
	Maj 1988
	Januar 1988
	Maj 1987
	Januar 1987
	1986 eller tidligere