Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1988.

MATEMATIK 1 LD

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 5 opgaver og er på 6 sider.

Opgaverne starter på side 2, **men læs først denne side grundigt.**

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	35%	Stilopgave i lineær algebra
2	15%	Stilopgave i grafteori
3	15%	Opgave i grafteori
4	20%	Opgave i lineær algebra
5	15%	Opgave i lineær algebra

Stilopgaver

I besvarelser af stilopgaver bør hovedtrækkene klart fremgå, og detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Når der henvises til resultater fra andre dele af noterne, bør dette **ikke** ske ved henvisning til afsnitsnummer. De resultater, der henvises til, bør formuleres (i den udstrækning, tiden tillader det).

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

Opgave 1 (Vægt 35%)

LA9 **Positivitetsindeks.**

(a) Giv definitionerne af begreberne: positivitetsindeks, positivitets-underrum og positiv definit matrix.

(b) Formuler og bevis en sætning, der beskriver positivitetsindekset for en symmetrisk matrix som den største dimension af et positivitetsunderrum.

(c) Formuler og bevis en sætning, der karakteriserer egenskaben positiv definit vha. determinanter af hoveddelmatricer ●

Opgave 2 (Vægt 15%)

G1 **Træer**

(a) Angiv definitionen af træ.

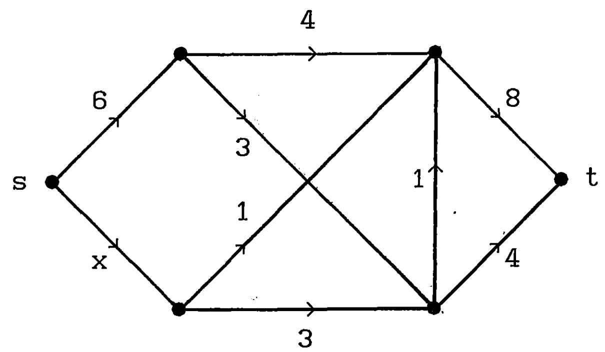
(b) Tegn alle (ikke orienterede) træer med 6 punkter.

(c) Bevis, at hvis T er et træ med m punkter, så har T $m-1$ kanter ●

Opgavesættet fortsættes

Opgave 3 (Vægt 15%)

I denne opgave er der givet transportnetværket:



Bestem for ethvert helt tal $x \geq 0$ værdien $F(x)$ af en maksimal strømning ●

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4 (Vægt 20%)

I denne opgave betragtes to matricer:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Idet ε_3 (som sædvanlig) betegner den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$, er de lineære afbildninger $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ og $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved, at deres ε_3-matricer mht. ε_3 er henholdsvis A og B ; altså: ${}_{\varepsilon_3}[f]_{\varepsilon_3} = A$ og ${}_{\varepsilon_3}[g]_{\varepsilon_3} = B$.

(a) Bestem en invertibel 3×3-matrix S , så $S^{-1}AS$ er en diagonalmatrix.

(b) Bestem en basis α for $\mathbb{R}^3$, så α-matricen ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ for f mht. α er en diagonalmatrix.

(c) Bestem en basis for $\ker g$, og bestem en vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, så $g(\underline{x}) \in \ker g$ og $g(\underline{x}) \neq \underline{o}$.

(d) Begrund, at $\beta = (\underline{x}, g(\underline{x}), \underline{y})$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, idet $\underline{y} = (1,-1,2)$. Begrund, at β-matricen for f mht. β er en diagonalmatrix, og at de 2 første søjler i β-matricen for g mht. β har følgende udseende:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet$$

Opgavesættet fortsættes

Opgave 5 (Vægt 15%)

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ sættes:

$$C[a] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & a^2-a \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D[a] = \begin{bmatrix} 3 \\ a+3 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ en basis for $\ker C[a]$ og en basis for $\operatorname{span} C[a]$.

(b) Bestem mængden:

$$M = \{ a \in \mathbb{R} \mid D[a] \in \operatorname{span} C[a] \} .$$

(c) For ethvert $a \in \mathbb{R}$ betegner L_a løsningsmængden til det lineære ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + (a+2)x_2 + (a+2)x_3 &= a+3 \\ (a^2-a)x_3 &= a \end{aligned} .$$

Bestem mængderne:

$T = \{ a \in \mathbb{R} \mid L_a = \emptyset \}$

$N = \{ a \in \mathbb{R} \mid L_a$ har netop et element $\}$

$U = \{ a \in \mathbb{R} \mid L_a$ er uendelig $\}$ ●

- o O o -

HUSK AT UDFYLDE NÆSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer:

Sæt kryds:

Sæt kryds:	Klasse **efterår 87**	Lærer
	Mat-kemi	Erik Christensen og Jens Ulrik Lefmann
	1	Søren Vagner
	2 og 3	Sten Hansen
	4	Jørn Børling Olsson
	5	Inge Futtrup Christensen
	6	Bergfinnur Durhuus
	7	Hans-Bjørn Foxby
	8	Martin Olsen
	9	Ib Jørgensen
	10	Peter Trosborg

Har du tidligere været til skriftlig prøve i Matematik 1LD?

Sæt kryds: ☐ nej

☐ ja

Hvornår?

Sæt kryds:	Eksamenstermin
	januar 1988
	maj 1987
	januar 1987
	1986 eller tidligere