Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1986-87.

MATEMATIK 1 LD

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 5 opgaver og er på 5 sider. Opgaverne starter på side 2, **men læs først denne side grundigt.**

Bedømmelse.

Opgaverne bedømmes af den lærer, der afmærkes på arket sidst i opgavesættet. Arket vedlægges opgavebesvarelsen.

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	35%	Stilopgave i lineær algebra
2	15%	Stilopgave i grafteori
3	15%	Opgave i grafteori
4	20%	Opgave i lineær algebra
5	15%	Opgave i lineær algebra

Stilopgaver

I besvarelser af stilopgaver bør hovedtrækkene klart fremgå, og detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Når der henvises til resultater fra andre dele af noterne, bør dette **ikke** ske ved henvisning til afsnitsnummer. De resultater, der henvises til, bør formuleres (i den udstrækning, tiden tillader det).

Opgave 1 (Vægt 35%)

(Denne opgave består af 3 delspørgsmål, der er mærket (a), (c) og (d)).

LA6 **Diagonaliserbare matricer**

(a) Giv definitionen af, at en matrix er reelt diagonaliserbar.

Det antages for bekendt, at der for enhver $n \times n$-matrix A, enhver invertibel $n \times n$-matrix Q, ethvert tal $d \in \mathbb{R}$ og ethvert tal $j \in \{1,\dots,n\}$ gælder:

(*) $(Q^{-1}AQ)_j = dE_j \iff AQ_j = dQ_j$,

og dette ønskes **ikke** yderligere uddybet.

(c) Bevis, at der for enhver $A \in \mathbb{R}^n_n$ gælder:

A er reelt diagonaliserbar $\iff \Sigma_{\mathbb{R}} em_A = n$.

(d) Bevis, at følgende to udsagn er ensbetydende for enhver $n \times n$-matrix A :

(1) A er reelt diagonaliserbar.

(2) For enhver karakteristisk rod $d \in \mathbb{C}$ for A gælder: $d \in \mathbb{R}$ og $em_A d = rm_A d$ ●

Opgave 2 (Vægt 15%)

G3 **Transportnetværk**

Vi betragter et transportnetværk N .

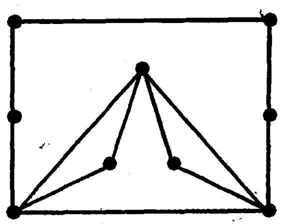
(a) Hvad vil det sige, at en kant k i N er kritisk ?

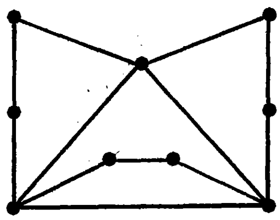
(b) Vi antager nu, at der er en maksimal strømning f med værdi F i N . Lad $\mathcal{A}$ betegne de punkter i N , som vi kan nå ad frugtbare veje fra s , og lad $\mathcal{B}$ betegne resten af punkterne i N .

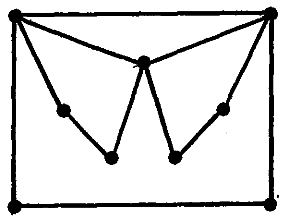
Bevis, at $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ udgør et snit $\mathcal{S}$ i N , og at kapaciteten $c(\mathcal{S})$ af dette snit er F ●

Opgave 3 (Vægt 15%)

I denne opgave betragtes følgende tre grafer:


Γ_1


Γ_2


Γ_3

(a) Angiv valensspektrene for Γ_1 , Γ_2 og Γ_3 .

(b) Afgør for ethvert $i \in \{1,2,3\}$, om grafen Γ_i kan todeles.

(c) Begrund, at to af graferne er isomorfe, og at disse ikke er isomorfe med den tredie ●

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 4 (Vægt 20%)

I denne opgave benyttes det sædvanlige indre produkt i $\mathbb{R}_1^4$.

Sæt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ og $U = \text{span}\, A$.

(a) Begrund, at $U \subseteq \ker A$.

(b) Begrund, at $U = \ker A$.

(c) Bestem en basis for $U^{\perp}$ (f.eks. ved at udnytte, at $U = \ker A$).

(d) Bestem en ortonormal basis for U •

Opgave 5 (Vægt 15%)

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ betegner $B[a]$ matricen $\begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 5-a & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{bmatrix}$.

(a) Bestem mængden $M = \{ a \in \mathbb{R} \mid B[a] \text{ er positiv definit} \}$.

(b) Bestem en ortogonal matrix Q , så $Q^{-1}B[2]Q$ er en diagonalmatrix •

- o O o -

HUSK AT UDFYLDE NÆSTE SIDE OG VEDLÆGGE VED DEN BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer:

Sæt kryds:

Sæt kryds:	Klasse efterår 87	Lærer (bedømmer opgavesættet)
	Mat-kemi	Jens Ulrik Lefmann (Erik Christensen)
	1	Søren Vagner
	2 og 3	Sten Hansen
	4	Jørn Børling Olsson
	5	Inge Futtrup Christensen
	6	Bergfinnur Durhuus
	7	Hans-Bjørn Foxby
	8	Martin Olsen
	9	Ib Jørgensen
	10	Peter Trosborg