Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1986/87

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 4 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 20%)

Betragt vektorfeltet $\underline{k}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ defineret i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ved

$$f(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$g(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

a) Lad $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ således at $\rho = \sqrt{x^2+y^2} > 1$.
Find $\int_\gamma \underline{k} \cdot d\underline{r}$, dels når γ er liniestykket fra $(1,0)$ til $(\rho,0)$, og dels når γ er cirkelbuen med centrum i $(0,0)$ fra $(\rho,0)$ til (x,y) taget i den positive omløbsretning.

b) Vis, at $\underline{k}(x,y)$ er et gradientfelt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og find en stamfunktion.

c) Bestem løsningskurven gennem $(1,0)$ til differentialligningen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 20%)

En reel funktion f defineret på $]-\frac{3}{2}, \infty[$ er givet ved

$$f(x) = \frac{5+3x}{2x^2+7x+6}$$

a) Dekomponer den rationale funktion $f(x)$.

b) Find for $|x| < \frac{3}{2}$ en kvotientrække med sum $\frac{1}{2x+3}$.
Find derpå en potensrækkefremstilling af $f(x)$ med 0 som udviklingspunkt og bestem dens konvergenstal.

c) Find den stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$, som opfylder $F(\frac{1}{2}) = \log 5$.

d) Find en potensrækkefremstilling af $F(x)$ i en omegn af 0.

Opgave 3. (Omtrentlig vægt 20%)

I XT-planen betragtes differentialligningen

$$(*) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^2}\right)x = 6(1+t^2)$$

a) Vis, at funktionen $x = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, er løsning til den homogene ligning.

b) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

Opgavesættet fortsættes.

Opgave 4. (Omtrentlig vægt 15%)

Lad $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning, der hører til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

a) Bestem en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$, og suppler denne basis til en basis $(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4)$ for $\mathbb{R}^4$.

b) Bestem en basis for kernen ker f.

c) Bestem en basis $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$ for $\mathbb{R}^3$, således at matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

repræsenterer f i baserne $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$ og $(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4)$.

Opgave 5. (Omtrentlig vægt 15%)

Lad $K_B:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være den kvadratiske form, der er givet ved

$$K_B(x_1,x_2,x_3) = 9x_1^2+25x_2^2+16x_3^2+24x_1x_3.$$

a) Opskriv den matrix $\underline{\underline{B}}$, der i den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$ repræsenterer den til K_B hørende symmetriske bilinearform $B:\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, og bestem en ortonormal basis $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$, der diagonaliserer B.

Opgaven fortsættes.

b) Begrund, at der gælder $K_B(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, og bestem $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, så $K_B(\underline{x}) = 0$ og $\underline{x} \neq \underline{0}$.

c) Bestem en basis $(\underline{c}_1, \underline{c}_2)$ for et 2-dimensionalt underrum U af $\mathbb{R}^3$, så $K_B(\underline{u}) > 0$ for alle $\underline{u} \in U \setminus \{\underline{0}\}$.

<u>Opgave 6</u>. (Omtrentlig vægt 10%)

Antag, at Γ er et træ med følgende egenskaber:

netop 7 punkter har valens 1,

netop 5 punkter har valens 2,

netop 3 punkter har valens 3,

netop x punkter har valens 4, og

ingen punkter med valens større end 4.

Bestem antallet x af punkter med valens 4.