Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1984/85

M A T E M A T I K 1

Opgaver til besvarelse i 5 timer.
Sædvanlige hjælpemidler kan medbringes, dog ikke lommeregnere.
Sættet er på 4 sider og består af 5 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad (f_n) og (g_n) være to følger af funktioner fra $[-1,1]$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}$$

$$g_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

1° Vis at følgerne (f_n) og (g_n) begge er punktvis konvergente på $[-1,1]$ og find deres grænsefunktioner f og g.

2° Vis at ingen af følgerne er uniformt konvergent på $[-1,1]$.

3° Undersøg om

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \text{for } n \to \infty$$

og om

$$\int_{-1}^{1} g_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} g(x)\,dx \qquad \text{for } n \to \infty.$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2 (Vægt 20%)

En flade er givet ved parameterfremstillingen

$$(*) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}v^2 \cos 2u \\ y &= \frac{1}{2}v^2 \sin 2u\,, \\ z &= v \cos u \end{aligned} \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,.$$

1° Gør rede for, at der er tale om en glat C^∞-flade. Find en ligning for tangentplanen i det til $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \sqrt{2}$ svarende punkt af fladen.

2° Vis, at mængden

$$E = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\,, \quad 1 \leq v \leq 2\}$$

ved (*) afbildes bijektivt på sit billede F .

3° Udregn den eksakte værdi af fladeintegralet

$$\int_F \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\sigma \,.$$

Opgave 3 (Vægt 20%)

Lad $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion og lad $\underline{k} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ være vektorfeltet givet ved

$$\underline{k}(x,y) = g(r)(-y,x)\,, \qquad (x,y) \neq (0,0)\,,$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

1° Find cirkulationen af $\underline{k}$ langs cirklen γ_ρ med centrum $(0,0)$ og radius $\rho \in \mathbb{R}_+$, gennemløbet i positiv omløbsretning.

(opgaven fortsættes)

2^o Betragt den til $\underline{k}$ svarende differentialform

$$-g(r)ydx + g(r)xdy \ .$$

Vis at denne er lukket netop når g er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r} \ , \qquad r \in \mathbb{R}_+ \ .$$

3^o Det oplyses at $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \leq 0 \wedge y = 0\}$ er et enkelt-sammenhængende område. Bestem mængden af C^1-funktioner $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, for hvilke

$$\underline{k}(x,y) = g(r)(-y,x) \ , \qquad (x,y) \in \Omega \ ,$$

er et gradientfelt.

Opgave 4 (Vægt 25%)

Lad $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, som er knyttet til matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

1^o Find dimensionen af $f(\mathbb{R}^3)$, og angiv en basis for $f(\mathbb{R}^3)$.

2^o Find dimensionen af $\ker f$, og find en basis for $\ker f$.

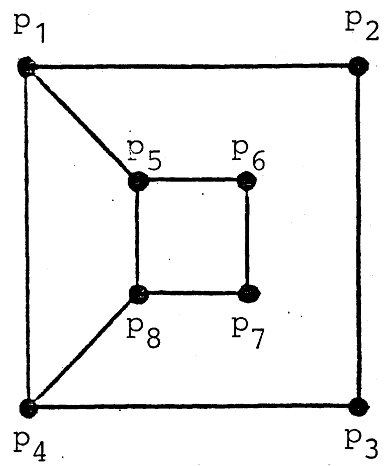
3^o Begrund, at der findes en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, som diagonaliserer f, og find en sådan.

4^o Angiv en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ og en ortogonal matrix $\underline{\underline{T}}$, således at $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$.

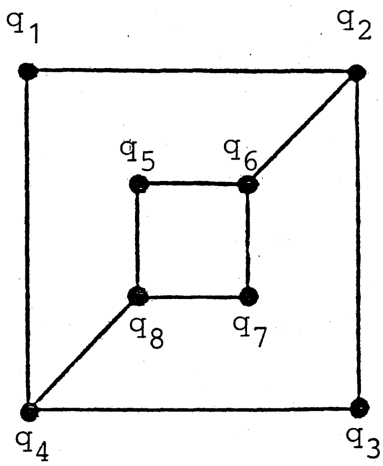
(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 5 (Vægt 15%)

1° Begrund, at følgende to grafer ikke er isomorfe:

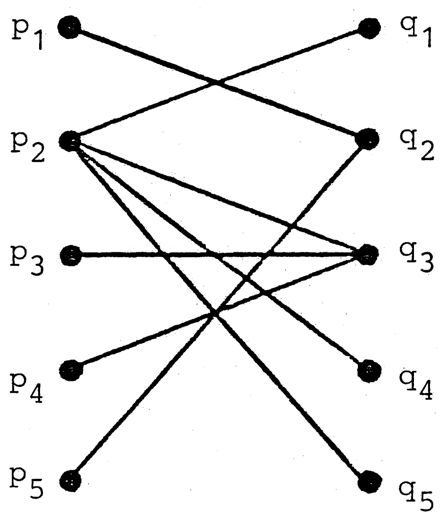


Γ_1



Γ_2

2° Begrund, at følgende graf ikke har en perfekt parring:



Angiv en maksimal parring.