Københavns Universitet
Det naturvidenskabelige Fakultet
Eksamensterminen vinteren 1994-95

MATEMATIK 1 LA , GAMMELT PENSUM

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 4 opgaver og er på ialt 5 sider.

Opgaverne starter på side 2 og slutter på side 4, **men læs først denne side grundigt.**

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	50%	Stilopgave
2	15%	Problemopgave
3	15%	Problemopgave
4	20%	Problemopgave

Stilopgavebesvarelsen skal udformes, så hovedtrækkene klart fremgår, mens detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Der kan henvises til resultater fra tidligere dele af stilopgaven blot ved at angive delspørgsmålets betegnelse ((a) , (b) , (c) , ...) samt til *navngivne* sætninger i noterne blot ved at angive sætningens navn, hvis ikke andet er krævet i opgaveteksten. Henvisning må aldrig ske ved afsnitsnummer, så henvisning til en unavngiven sætning eller bemærkning skal ske ved at formulere denne (i den udstrækning, tiden tillader det).

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

EKSAMENSOPGAVE 1 (Vægt 50%)

STILOPGAVE C. Dimension af underrum.

Antag, at $\alpha = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p)$ og $\beta = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_q)$ er to sæt af vektorer i $\mathbb{R}^n$ bestående af henholdsvis p og q vektorer og med tilhørende matricer $A \in \mathbb{R}^n_p$ og $B \in \mathbb{R}^n_q$.

(a) Bevis, at hvis α er *lineært uafhængigt* og $\operatorname{span} \alpha \subseteq \operatorname{span} \beta$, da gælder $p \leq q$, og der findes en *injektiv* $q \times p$-matrix S, så $A = BS$. Hvis der som i noterne henvises til et tilsvarende resultat vedrørende matricer, skal dette både formuleres og bevises.

(b) Bevis, at hvis α og β begge er baser for underrummet U af $\mathbb{R}^n$, da gælder $p = q$.

(c) Giv definitionen af dimension af underrum af $\mathbb{R}^n$, og kommentér, hvorfor denne definition er mulig.

(d) Bevis, at følgende er ensbetydende for sættet $\alpha = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p)$, når dets vektorer tilhører underrummet U af $\mathbb{R}^n$.

(*i*) α er en basis for U;

(*ii*) α er lineært uafhængigt og $p = \dim U$;

(*iii*) α er et frembringersæt for U og $p = \dim U$ ●

Eksamenssættet fortsættes på næste side

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

EKSAMENSOPGAVE 2 (Vægt 15%)

Lad A være 3×4 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestem rangen $\operatorname{rg} A$ samt en basis for $\operatorname{søj} A$ $(\subseteq \mathbb{R}^3_1)$.

(b) Bestem dimensionen $\dim \operatorname{nul} A$ samt en basis C for $\operatorname{nul} A$ $(\subseteq \mathbb{R}^4_1)$.

(c) Afgør, om $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tilhører $\operatorname{søj} A$.

EKSAMENSOPGAVE 3 (Vægt 15%)

For $c \in \mathbb{R}$ betragter vi først en 2×2 matrix $A(c)$

$$A(c) = \begin{pmatrix} c & c^2 \\ 2 & 2c \end{pmatrix} .$$

(a) Find for ethvert $c \in \mathbb{R}$ egenværdierne for $A(c)$.

(b) Bestem mængden $\mathcal{D}_1 = \{c \in \mathbb{R} \mid A(c) \text{ er reelt diagonaliserbar}\}$.

Opgaven fortsættes på næste side

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

(c) Betragt nu 4x4 matricen B(c)

$$B(c) = \left(\begin{array}{c|c} A(c) & 0 \\ \hline 0 & -A(c) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} c & c^2 & 0 & 0 \\ 2 & 2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & -c^2 \\ 0 & 0 & -2 & -2c \end{pmatrix} .$$

Find egenværdierne for B(c) og bestem mængden

$\mathcal{D}_2 = \{c \in \mathbb{R} \mid B(c)$ er reelt diagonaliserbar$\}$.

EKSAMENSOPGAVE 4 (Vægt 20%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_4$ i $\mathbb{R}^4$ være givet ved;

$\underline{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$

$\underline{a}_2 = (0, 1, 4, 0)$

$\underline{a}_3 = (0, 2, 9, 0)$

$\underline{a}_4 = (4, 1, 9, 1)$.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved;

$f(\underline{e}_1) = \underline{a}_1$, $f(\underline{e}_2) = \underline{a}_2$, $f(\underline{e}_3) = \underline{a}_3$, $f(\underline{e}_4) = \underline{a}_4$.

Lad B betegne matricen ${}_{\varepsilon_4}[f]_{\varepsilon_4}$.

(a) Vis, at f er injektiv.

(b) Begrund, at B er invertibel og bestem B^{-1} .

(c) Lad $C = B^t$. Begrund, at C er invertibel og bestem C^{-1} .

(d) Lad $\alpha = (\underline{a}_1 , \underline{a}_2 , \underline{a}_3 , \underline{a}_4)$. Begrund, at α er en basis for $\mathbb{R}^4$ og bestem ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$.

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer: Personnummer:

ENTEN

Sæt kryds	**Indslusningskursus (IK) 1993-94** Lærere
	Martin Olsen & Ole Hummelshøj
	Ib Jørgensen & Jens U. Lefmann
	S.M.Jørgensen & P.Trosborg

ELLER

Sæt kryds	Klasse **efter-år 93**	Lærer
	1	Michael Lund
	2	Søren Vagner
	3	Kim Bertelsen
	4	Anders Jensen
	5	Hans-Bjørn Foxby
	6	Søren Eilers
	7	Simon Sneider
	8	Mogens Nørgaard Olesen
	9	Kjeld Bagger Laursen
	10	Jørn Børling Olsson
	11	Ernst Hansen
	12	Jens Erik Wang
	13	Hans Jørgen Bech
	14	Henning Brandt Jensen
	15	Bjarne Stoklund Knudsen
	16	Peter Juul Trosborg
	17	Michel Solovej

Har du tidligere været til eksamen i Mat 1LA

Sæt kryds: ☐ nej

☐ ja

I bekræftende fald angiv med kryds eksamensterminen:

Sæt kryds:	Eksamenstermin
	maj 1994
	januar 1994
	maj 1993
	januar 1993
	maj 1992
	januar 1992
	maj 1991
	januar 1991
	maj 1990
	januar 1990
	maj 1989
	tidligere