Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1990.

MATEMATIK 1 LA

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Sættet består af 3 opgaver og er på 4 sider.

Opgaverne starter på side 2, **men læs først denne side grundigt.**

Vægtning.

Ved bedømmelsen vægtes opgaverne på følgende måde:

Opgave	Vægt	Kommentar
1	50%	Stilopgave
2	30%	Problemopgave
3	20%	Problemopgave

Stilopgaver

I besvarelser af stilopgaver bør hovedtrækkene klart fremgå, og detaljer medtages i den udstrækning, tiden tillader det. Når der henvises til resultater fra andre dele af noterne, bør dette **ikke** ske ved henvisning til afsnitsnummer. De resultater, der henvises til, bør formuleres (i den udstrækning, tiden tillader det).

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

OPGAVE 1 (Vægt 50 %)

LA8 **Symmetriske matricer**

Det antages for bekendt, at enhver symmetrisk reel matrix har en **reel** karakteristisk rod, og dette ønskes **ikke** yderligere uddybet.

(a) Bevis, at hvis $A \in \mathbb{R}^n_n$ er symmetrisk, og hvis $Q \in \mathbb{R}^n_n$ er ortogonal, da er $Q^{-1}AQ$ symmetrisk.

(b) Formuler og bevis hovedsætningen om symmetriske matricer.

(c) Bevis, at egensøjler for en symmetrisk matrix hørende til forskellige egenværdier er indbyrdes vinkelrette ●

OPGAVE 2 (Vægt 30 %)

Lad $S \in \mathbb{R}^4_4$ være matricen givet ved

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Angiv mellem søjlerne i S en lineær relation, der ikke er triviel, og bestem rg S .

(b) Bestem en basis for ker S .

(c) Begrund, at $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ er en basis for span S .

Opgaven fortsættes

Opgave 2 fortsat:

(d) Sæt $U = \{ X \in \mathbb{R}^4_1 \mid x_3 + x_4 = 0 \}$. Begrund, at der gælder span $S = U$.

(e) Sæt endvidere $V = \{ X \in \mathbb{R}^4_1 \mid x_1 - x_2 = 0 \}$. Angiv en surjektiv lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, så $\ker f = U \cap V$.

(f) Bestem $\dim (U \cap V)$, og angiv en basis for $U \cap V$ ●

OPGAVE 3 (Vægt 20 %)

Lad $A \in \mathbb{R}^2_2$ betegne den kvadratiske matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Begrund, at A er reelt diagonaliserbar.

(b) Bestem en invertibel matrix Q og en diagonalmatrix Δ , så $Q^{-1}AQ = \Delta$ og $A = Q\Delta Q^{-1}$.

(c) Udregn Δ^4 og A^4 , hvor Δ^4 og A^4 betegner matrixprodukterne henholdsvis $\Delta\Delta\Delta\Delta$ og $AAAA$. (Anvendelse af (b) kan spare en del regnearbejde vedrørende A^4 .)

(d) Bestem matricer B og C , så $BB = \Delta$ og $CC = A$ ●

- o O o -

HUSK AT UDFYLDE SIDSTE SIDE OG VEDLÆGGE DEN VED BESVARELSEN !

UDFYLD DENNE SIDE OG VEDLÆG DEN VED BESVARELSEN

Navn:

Eksamensnummer: Personnummer:

Sæt kryds	Klasse efter-år 89	Lærer (retter besvarelsen)
	1	Søren Vagner
	2	Dinara Johansen
	4	Inge Futtrup Christensen
	5	Martin Olsen
	6	Ryszard Nest
	7	Sten Hansen
	8	Mogens Nørgaard Olesen
	9	Jens Erik Wang
	10	Martin Olsen
	11	Jørn Børling Olsson
	12	Torben Maack Bisgaard
	13	Ryszard Nest
	14	Ian Kiming

Har du tidligere været til skriftlig prøve i Matematik 1LD?

Sæt kryds: ☐ nej

☐ ja

I bekræftende fald angiv med kryds eksamensterminen:

Sæt kryds:	Eksamenstermin
	maj 1989
	januar 1989
	maj 1988
	januar 1988
	maj 1987
	januar 1987
	1986 eller tidligere