Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96

Matematik 1 LA

Opgaver til besvarelse i 3 timer
Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.
Opgaverne vægtes med nedenstående procentangivelser.

Stilopgave 3. *Indre produkter.* (50%)

1° Definer begrebet indre produkt i et vektorrum V.

Lad V være et indre produktrum.

2° Definer normen $\|\mathbf{v}\|$ af $\mathbf{v} \in V$.

3° Formuler og vis Cauchy-Schwarz' ulighed.

4° Hvad betyder det at en mængde $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ af vektorer er
 a) ortogonal,
 b) ortonormal.

Vis, at hvis S er ortogonal og $\mathbf{v}_i \neq 0$ for $i = 1, \cdots, n$, så er S lineært uafhængig.

Problemopgaver

Opgave 1 (20%)

Lad $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ angive standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Betragt en lineær afbildning $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ givet ved at

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(e_4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Angiv nulrummet for T.

b) Bestem dimensionen af $T(\mathbb{R}^4)$ og find en basis for dette underrum.

c) Supplér den i b) fundne basis til en basis for $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2 (15%)

Lad $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2)$, hvor a er et vilkårligt reelt tal.

a) For hvilke a er A diagonaliserbar?

Opgave 2 fortsættes på side 2

b) Find for hvert a, for hvilket A er diagonaliserbar, egenværdierne for A og en basis for $\mathbb{R}^2$ af egenvektorer.

c) Udregn A^5 ved at udnytte resultatet fra b).

Opgave 3 (15%)

Antag at $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for vektorrummet V. Definer

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{w}_3 &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \ .
\end{aligned}$$

a) Gør rede for at $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ også er en basis for V.

b) Angiv basisskiftmatricerne der giver overgangen fra B' til B, samt fra B til B'.