Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik 1 LA

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Opgaverne vægtes med nedenstående procentangivelser.

Stilopgave 6 (50%)

1° Definer determinanten $\det A$ af en $n \times n$ matrix A.

2° Formulér sætningen om, at $\det A$ kan beregnes ved udvikling langs en vilkårlig række.

3° Vis ved induktion efter n, at determinanten af en $n \times n$ matrix A skifter fortegn, hvis to rækker ombyttes. (Du kan bruge resultatet fra 2° uden at bevise det). Gør rede for, at $\det A = 0$ hvis to rækker i A er ens.

4° Lad A' være den matrix der fremkommer af A ved rækkeoperationen $cR_i + R_j \to R_j$, hvor $i \neq j$. Vis, at $\det A' = \det A$.

Problemopgaver (50%)

Opgave 1 (15%)

Lad A være 3×3 matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1° Gør rede for at A er diagonaliserbar og at der findes en ortonormal basis i $\mathbb{R}^3$ af egenvektorer for A.

2° Find A's egenværdier og en ortonormal basis i $\mathbb{R}^3$ af egenvektorer.

3° Find rangen af matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (20%)

Betragt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{M}(2,2)$$

og lad

$$V = \operatorname{span}\{A, B, C\} .$$

1° Find $\dim V$ og gør rede for at $V \neq \mathbb{M}(2,2)$.

2° Vis, at $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin V$.

3° Er $\{A, B, C, D\}$ en basis for $\mathbb{M}(2,2)$?

4° Find A^{-1}.

Opgave 3 (15%)

I vektorrummet $\mathbb{P}_2$ af polynomier af grad ≤ 2 betragtes afbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ givet ved

$$T(a + bx + cx^2) = b + c - 2cx + (b + c)x^2 .$$

1° Gør rede for, at T er en lineær afbildning.

2° Vis, at $p(x) = x$ og $q(x) = (1 - x)^2$ ligger i billedrummet for T og at $\{p, q\}$ er en basis for $T(\mathbb{P}_2)$.

3° Bestem T's matrix relativt til baserne $\{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{P}_2$ og $\{p, q\}$ for $T(\mathbb{P}_2)$.

Hermed slutter eksamensopgaverne.

Udfyld skemaet på næste side og læg det ved besvarelsen.

Christian Berg, Kjeld Bagger Laursen